

*Урицкий Борис
Николаевич.*

**Современный
Гуманитарный
Университет**

Дистанционное образование

0660.01.01; 1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Юнита 1

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ**

МОСКВА 2001

Рекомендовано Министерством
общего и профессионального
образования Российской
Федерации в качестве учебного
пособия для студентов высших
учебных заведений

КУРС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Юнита 1. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Юнита 2. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Юнита 3. Дифференциальные уравнения.

Юнита 4. Ряды. Ряды Фурье.

ЮНИТА 1

Изложены основные понятия и факты тем "Переменные величины и функции", "Теория пределов", "Дифференциальное исчисление функций одной переменной", "Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных", "Приложения дифференциального исчисления к вопросам геометрии". Изложению придан неформальный характер. Разобрано значительное количество примеров.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета
Соответствует профессиональной образовательной программе СГУ № 1

ISBN 5-8323-0289-3

0660.001.01.00.01;1/11.13.Тир.14000

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2000

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	7
ЛИТЕРАТУРА	8
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	9
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	14
Введение	14
Глава I. Функция, предел, непрерывность	16
§1. Действительные числа. Постоянные и переменные величины	16
1.1. Действительные числа	16
1.2. Множества	17
1.3. Интервалы	18
1.4. Понятие величин	20
1.5. Переменные и постоянные величины	20
1.6. Область значений переменной величины	21
1.7. Последовательности	22
1.8. Логические символы	23
§2. Функция. График функции	23
2.1. Функция	23
2.2. График функции	25
§3. Элементы поведения функции	26
3.1. Ограниченные величины и функции	26
3.2. Возрастание и убывание функций на интервале	27
3.3. Четные и нечетные функции	28
3.4. Период. Периодические функции	31
§4. Сложная функция. Обратная функция. Неявная функция.	
Параметрическое задание функции. Элементарные функции	32
4.1. Сложная функция (функция от функции)	32
4.2. Обратная функция	34
4.3. Обратные тригонометрические функции	38
4.4. Элементарные функции	38
4.5. Неявные функции	39
4.6. Параметрическое задание функции	40
§5. Предел переменной величины. Предел функции	41
5.1. Предел переменной величины	41
5.2. Предел последовательности	42
5.3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$	45
5.4. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ (предел функции в точке)	49
5.5. Односторонние пределы при $x \rightarrow x_0$	51
§6. Бесконечно малые. Предел и бесконечно малые.	
Бесконечно большие	52
6.1. Бесконечно малые	52
6.2. Основные свойства бесконечно малых	53
6.3. Связь предела и бесконечно малых	55
6.4. Основные свойства пределов. Правила предельного перехода	55
6.5. Бесконечно большие величины	58
6.6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	60
6.7. Два замечательных предела	61

6.8. Раскрытие неопределенностей	63
6.9. Сравнение бесконечно малых	65
6.10. Эквивалентные бесконечно малые	67
6.11. Свойства эквивалентных бесконечно малых	68
6.12. Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$	68
§7. Непрерывные функции	69
7.1. Два определения непрерывности в точке, их эквивалентность	69
7.2. Свойства непрерывных функций	72
7.3. Непрерывность элементарных функций	73
7.4. Точки разрыва функции	73
7.5. Свойства функций, непрерывных на замкнутом интервале	74
Глава II. Производная и дифференциал	77
§1. Определение производной, её геометрический смысл и физические интерпретации	77
1.1. Задачи, приводящие к понятию производной	77
1.2. Определение производной	79
1.3. Геометрический смысл производной	81
1.4. Физические интерпретации производной (задачи 1,3,4)	81
§2. Связь между наличием производной и непрерывностью	81
2.1. Непрерывность функции, имеющей производную	81
2.2. Правая и левая производные	82
2.3. Бесконечные значения производной	83
§3. Основные свойства производной (правила дифференцирования)	84
§4. Производные основных элементарных функций	86
Таблица основных правил и формул дифференцирования	91
§5. Техника дифференцирования	92
5.1. Примеры	92
5.2. Логарифмическое дифференцирование	93
5.3. Дифференцирование неявной функции	94
5.4. Дифференцирование параметрически заданной функции	95
§6. Дифференциал	95
6.1. Определение дифференциала	95
6.2. Правила нахождения дифференциалов функций	96
6.3. Инвариантность формы записи дифференциала	97
6.4. Геометрический смысл дифференциала	98
6.5. Применение дифференциала в приближенных вычислениях	98
6.6. Ещё раз о дифференцируемости функции	99
§7. Производные и дифференциалы разных порядков	99
7.1. Производные высших порядков	99
7.2. Дифференциалы высших порядков	100
7.3. Механический смысл второй производной	100
Глава III. Приложения производной к исследованию функций	102
§1. Теорема о хорде и касательной (Ролль, Лагранж, Коши)	102
1.1. Геометрическое утверждение	102
1.2. Теорема Лагранжа	102
1.3. Теорема Ролля	103
1.4. Теорема Коши	104
§2. Монотонные функции. Признаки возрастания и убывания функции	105
2.1. Напоминание определений	105
2.2. Признак возрастания или убывания функции	106
§3. Экстремумы. Признаки максимума и минимума	108

3.1. Точки максимума и минимума	108
3.2. Необходимый признак экстремума (признак Ферма)	109
3.3. Достаточный признак экстремума	110
§4. Наибольшее и наименьшее значение функции на замкнутом интервале	111
§5. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривой	112
5.1. Выпуклость и вогнутость	112
5.2. Точки перегиба	114
5.3. Необходимый признак точки перегиба	114
5.4. Достаточный признак точки перегиба	115
§6. Асимптоты	116
6.1. Определение	116
6.2. Вертикальные асимптоты	116
6.3. Наклонные и, в частности, горизонтальные асимптоты	117
§7. Правило Лопиталья	119
7.1. Неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Правило Лопиталья	119
7.2. Другие неопределенности	120
§8. Общая схема исследования функции. Построение графика	121
§9. Формула Тейлора	123
9.1. Доказательство формулы Тейлора	123
9.2. Пример применения. Второй достаточный признак экстремума	126
Глава IV. Функции нескольких переменных. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	127
§1. Функции двух переменных, непрерывность	127
1.1. Функции двух переменных	127
1.2. Области на плоскости	128
1.3. Геометрическое изображение функции двух переменных	129
1.4. Линии уровня	130
1.5. Предел и непрерывность функции двух переменных	131
1.6. Свойства непрерывных функций	132
1.7. Приращения независимых переменных и приращения функции	132
§2. Дифференциальное исчисление функций двух переменных	133
2.1. Частные производные	133
2.2. Геометрический смысл частных производных	134
2.3. Касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$	135
2.4. Дифференцируемость функции. Полный дифференциал	136
2.5. Геометрический смысл полного дифференциала	138
2.6. Дифференцирование сложной функции	139
2.7. Инвариантность формы записи дифференциала	140
2.8. Производные высших порядков	141
2.9. Экстремумы функций двух переменных	142
2.10. Необходимый признак экстремума	142
2.11. Достаточный признак экстремума	143
2.12. Наибольшее и наименьшее значения в области	144
§3. Функции трех и более переменных. Скалярное поле	145
3.1. Функция трех переменных	145
3.2. Внутренние и граничные точки	145
3.3. Поверхности уровня	145
3.4. Функции любого числа переменных	146

3.5. Предел, непрерывность, частные производные для функции нескольких переменных	146
3.6. Касательная прямая и нормаль к графику неявной функции	147
3.7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявным уравнением	147
3.8. Скалярное поле	148
3.9. Производная по направлению	148
3.10. Градиент скалярного поля	150
Глава V. Дополнительные вопросы приложений дифференциального исчисления к геометрии	153
§1. Плоские кривые. Кривизна	153
1.1. Дифференциал длины дуги	153
1.2. Кривизна плоской линии	154
1.3. Радиус кривизны. Круг и центр кривизны	157
§2. Пространственные кривые	158
2.1. Векторное уравнение пространственной кривой	158
2.2. Касательная к пространственной кривой	159
2.3. Нормальная плоскость	161
2.4. Дифференциал длины дуги	161
2.5. Натуральные уравнения кривой. Главная нормаль	162
2.6. Кривизна пространственной кривой	163
2.7. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение	165
2.8. Скорость и ускорение точки, движущейся по кривой	166
2.9. О касательной плоскости к поверхности	167
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	168
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	172
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Действительные числа. Интервалы числовой оси. Переменные величины, последовательности. Функциональная зависимость переменных величин, функции одной переменной. Способы задания и виды функций, элементарные функции. Понятие предела переменной величины. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Свойства бесконечно малых, свойства пределов. Два замечательных предела. Сравнение бесконечно малых, эквивалентные бесконечно малые. Непрерывные функции, их свойства.

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная, ее геометрический смысл и механическая интерпретация. Основные правила и формулы дифференцирования, техника дифференцирования. Дифференциал, его определение, инвариантность формы, геометрический смысл. Применения дифференциала в приближенных вычислениях. Производные высших порядков. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы о касательной и хорде): Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Приложение дифференциального исчисления к исследованию функций: возрастание и убывание, точки экстремума, выпуклость и вогнутость, точки перегиба, нахождение наибольших и наименьших значений, асимптоты. Формула Тейлора. Функция двух и нескольких переменных. Типы многомерных областей. Предел и непрерывность. Полное и частное приращение. Частные производные. Касательная плоскость, ее уравнение. Дифференцируемость функций двух переменных. Полный дифференциал, его геометрический смысл, применение в приближенных вычислениях. Точки экстремума, необходимый и достаточный признаки.

Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению. Градиент и его свойства. Дальнейшие приложения дифференциального исчисления к геометрии. Кривизна плоских линий, круг кривизны и центр кривизны. Векторное уравнение пространственной кривой. Производная векторной функции как направляющий вектор касательной прямой. Кривизна пространственной кривой (как предел средней кривизны). Нормальная плоскость. Главная нормаль, бинормаль, кручение, соприкасающаяся плоскость (понятия).

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Шипачев В.С. Высшая математика. М., 1985.
- *2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное вычисление. Т.1. М., 1978.

Дополнительная

3. Никольский С.М. Элементы математического анализа. М.: Наука, 1981.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1978.
5. Керимова Д.Х., Красовская И.А. Математика. Базовый курс. Основы математического анализа. Юнита 3. М.: СГУ, 1998.
6. Красовская И.А., Осиленкер Б.П. Математика. Юнита 2. Основы математического анализа. М.: СГУ, 1996.
7. Осиленкер Б.П. Математика. Юнита 3. Основы математического анализа. М.: СГУ, 1996.
8. Осиленкер Б.П. Математика (углубленный курс). Юнита 1. Основы математического анализа. Часть II. М.: СГУ, 1998.
9. Хавинсон С.Я., Кузина Т.С. Введение в анализ. Переменные величины и функции. М.: МИСИ, 1989.
10. Хавинсон С.Я., Кузина Т.С. Предел переменной величины. Предел функции. М.: МИСИ, 1989.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	Вычисление пределов переменных величин и функций одной переменной	Целенаправленное преобразование функции, предел которой разыскивается, чтобы: а) применить непосредственно определения предела, б.м. и б.б. или б) использовать два замечательных предела и их следствия или в) воспользоваться свойствами эквивалентных б.м. и их таблицей или г) воспользоваться правилом Лопиталя или д) применить совместно некоторые из пп. а)–г).
2	Нахождение производных и дифференциалов функций одной переменной (дифференцирование)	1. Целенаправленное и последовательное применение основных правил и формул дифференцирования. 2. В частности, опираемся на правило дифференцирования сложной функции. Для этого каждую встретившуюся сложную функцию разлагаем на “звенья”, из которых она составлена путем суперпозиций. 3. Дифференцируем каждое из “звеньев” по его (промежуточному) аргументу. <i>Примечание.</i> П. 2 следует делать “мысленно”, не вводя новых букв для обозначения промежуточных аргументов.
3	Составление уравнений касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$	1. Находим производную $f'(x)$ и берем ее значение $f'(x_0)$ при требуемом задачей значении x_0 аргумента. 2. Записываем уравнения касательной $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ и нормали $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

№ п/п	Умение	Алгоритмы
4	Использование производной для исследования возрастания и убывания функции	1. Находим производную y'. 2. Решая уравнение $y' = 0$, находим стационарные точки. 3. Находим другие критические точки для y' (точки, в которых y' терпит разрыв). 4. Разбиваем получившимися стационарными и критическими точками интервалы области определения на частичные интервалы. 5. Определяем знак y' на каждом из таких интервалов. Если $y' > 0$ на интервале – функция возрастает, если $y' < 0$ – убывает.
5	Использование производной для нахождения экстремумов	1. Поступаем, как в пп. 1 – 3 умения №4. 2. Следим за сменой знака y' при переходе через каждую из критических точек и применяем достаточный признак экстремума.
6	Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом интервале	1. Как в пп. 1 – 3 умения №4. 2. Вычисляем значения функции в найденных критических точках и в концах интервала. 3. Среди указанных в п.2 значений отбираем наибольшее и наименьшее.
7	Полное исследование функции и построение графика	1. Производим элементарное исследование: область определения, четность, нечетность, периодичность, точки разрыва, левые и правые пределы в этих точках, вертикальные асимптоты, точки пересечения с осями. 2. Применяем умения №4 и №5 для нахождения интервалов возрастания, убывания и экстремумов. 3. Находим y'', ее критические точки (где она равна нулю или не существует), определяем знаки y'' на получившихся интервалах: где $y'' > 0$ – выпуклость, где $y'' < 0$ – вогнутость, в точках перемены знака – перегиб. <i>Примечание.</i> Если y'' получается очень слож-

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		ной, п.3 можно опустить. 4. Исследуем поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$, в частности нахождение наклонных асимптот. 5. Построение (схематичное) графика.
8	Вычисление частных производных функций двух и трех переменных	Считая y постоянным, дифференцируем функцию $z = f(x, y)$ по переменному x (по обычным правилам) – находим частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ по x. Частную производную по y – $\frac{\partial z}{\partial y}$ находим вполне аналогично, фиксируя x. Для функций трех и более переменных – та же схема.
9	Элементы исследования функций двух переменных	1. Находим область определения и (если требуется) линии уровня. 2. Вычисляем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. 3. Находим стационарные точки: точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, и точки, где частные производные перестают существовать – это критические точки. 4. Находим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. 5. Проверяем по достаточному признаку экстремума стационарные точки на наличие в них экстремума и выясняем характер этого экстремума. 6. Если предложено (дополнительно) найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, содержащейся в области определения функции, то проводим дополни

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		тельное исследование на границе, используя уравнения граничных кривых, на наибольшее и наименьшее значение на границе. 7. Сопоставляя пп. 3, 5 и 6, находим наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. <i>Примечание.</i> Иногда задача требует применения лишь некоторых алгоритмов умения №9.
10	Вычисление производной по направлению и градиента скалярного поля (для функций двух или трех переменных)	1. Для поля (функции) $u = f(x, y, z)$ находим ее частные производные. 2. Вычисляем градиент $\bar{g}$ по формуле $\bar{g} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$ <i>Примечание.</i> Если указана точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$, в которой надо вычислить градиент, то значения частных производных берутся в этой точке. 3. Вычисляем производную по направлению $\bar{l}(a, b, c)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$: $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right _{P_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right _{P_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{P_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right _{P_0} \cos \gamma;$ направляющие косинусы $\bar{l}$ находятся по формуле: $\cos \alpha = \frac{a}{d}, \cos \beta = \frac{b}{d}, \cos \gamma = \frac{c}{d},$ где $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. <i>Примечание:</i> В случае двух переменных применяем аналогичные формулы: $\bar{g} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j},$

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha,$ где теперь $\bar{l}(a,b)$, $\cos \alpha = \frac{a}{d}$, $\sin \alpha = \frac{b}{d}$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}.$
11	Написание уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной неявным уравнением $F(x, y, z) = 0.$	1. Вычисляем $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ и подставляем в них координаты (x_0, y_0, z_0) заданной точки. 2. Уравнение касательной плоскости: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$ 3. Уравнение нормали: $\frac{(x - x_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{(y - y_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{(z - z_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}.$
12	Написание уравнений касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой, заданной параметрически: $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$	1. Определяем значение параметра t_0, соответствующее заданной точке (x_0, y_0, z_0) на кривой. 2. Если задано значение t_0 параметра, то находим точку $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), z_0 = \chi(t_0).$ 3. Уравнение касательной прямой: $\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi'(t_0)}.$ 4. Уравнение нормальной плоскости: $\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0) = 0.$

ВВЕДЕНИЕ

Математика – наука о пространственных формах и количественных отношениях действительного мира. Это определение, сделанное в свое время Ф.Энгельсом, нисколько не утратило своего значения и сейчас, когда мы критически воспринимаем ряд положений марксистской философии. Все основные математические понятия возникли и развивались в соответствии с потребностями естествознания и техники. “Математика очами физическими по справедливости называться может” – говорил М.В. Ломоносов.

Бурное и многогранное развитие естественных наук (астрономии, механики, физики), начавшееся в эпоху европейского Возрождения, потребовало для решения своих задач создания новых математических методов.

Во всех областях научной и практической деятельности человечество сталкивается с самыми разнообразными величинами (температурой и теплоемкостью, ускорением и скоростью, длинами и площадями, объемами и весами и т.д. и т.п.). Общим для разнообразных величин является лишь то, что они характеризуются числами, численными значениями. Величины эти постоянно меняют свои значения, являются переменными, причем изменение одних величин связано с изменением других (например, время и температура в данной точке). Явившийся важнейшей частью новых математических методов – математический анализ, к изучению которого мы приступаем, как раз и занимается переменными величинами в их взаимозависимости. При этом изучаемые в математическом анализе величины – абстрактные, отвлеченные, мы отвлекаемся от всех свойств конкретных величин кроме одного: быть выраженными числами, численными значениями. Поэтому изучаемые математическим анализом общие законы изменения абстрактных взаимосвязанных величин приложимы ко всем конкретным величинам всевозможных научных дисциплин. Список этих дисциплин все расширяется: если очень давно методы математического анализа уже применялись в механике, физике, астрономии, инженерном деле, то теперь без них не мыслятся и такие науки, как экономика, медицина и ряд других.

Первый период развития методов математического анализа, начавшийся в XVI веке и подготовленный в трудах многих выдающихся ученых [здесь надо прежде всего назвать создателей аналитической геометрии Р.Декарта (1596-1650) и П.Ферма (1601-1665)], был систематизирован и обобщен И.Ньютоном (1643-1727) и Г.Лейбницем (1646-1716). Однако интенсивное развитие математического анализа (со времен Ньютона и Лейбница его делят на две основные части: дифференциальное и интегральное исчисление) продолжается и до нашего времени, обогащаясь все новыми мощными методами и глубокими фактами. В развитие математического анализа внесли в свое время вклад и упоминающиеся в дальнейшем М.Ролль (1652-1719), де Лопиталь (1661-1704), Б.Тейлор (1685–1731), Ж.Лагранж (1736-1813) и О.Коши (1789-1857), причем Лагранж и Коши заслуженно считаются великими математиками.

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

В настоящем учебном пособии изложены основы первой части математического анализа – дифференциального исчисления. Оно является почти “самодостаточным” – только в нескольких местах за подробностями следует обращаться к учебникам из рекомендованного списка литературы.

Заметим, что формулы нумеруются только в случаях, когда на них в дальнейшем тексте есть ссылки; нумерация в каждой главе – своя. Иногда появляется знак #, означающий конец доказательства.

§1. Действительные числа. Постоянные и переменные величины

1.1. Действительные числа

Из школьного курса известно, что совокупность **действительных чисел** составляют положительные и отрицательные рациональные числа и положительные и отрицательные иррациональные числа, а также число нуль. **Рациональные числа** – это целые числа или обыкновенные дроби, т.е. отношения целых чисел, например, 2; -5; $\frac{3}{7}$; $-\frac{9}{5}$ (конечно, в знаменателе не может стоять нуль). Если пользоваться десятичными дробями, то рациональные числа представляются либо конечными, либо бесконечными, но периодическими десятичными дробями. **Иррациональные числа** представляются бесконечными непериодическими десятичными дробями (примеры иррациональных чисел:

$\sqrt{2}; -\sqrt{3}; \pi$). Хотя иррациональные числа сложнее рациональных, любое иррациональное число α можно со сколь угодно большой точностью заменить числом рациональным: для этого нужно оборвать бесконечную десятичную дробь, представляющую α , на достаточно далеком десятичном знаке.

Взяв какую-то прямую, установив на ней направление и начало отсчета и выбрав единицу измерения длины, мы получим возможность изображать действительные числа точками прямой: действительное число x (рис.1) изображается точкой A , координатой которой оно является.

Между точками прямой и действительными числами – координатами этих чисел – установилось взаимно однозначное соответствие: каждой точке прямой отвечает единственное

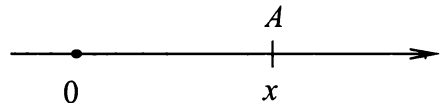


Рис. 1

действительное число – координата этой точки; и каждому действительному числу отвечает единственная точка, координатой которой является это число. В дальнейшем точку, изображающую число x , будем называть просто точкой x , а саму эту прямую – числовой осью.

Числовая ось изображает совокупность всех действительных чисел. Совокупность всех действительных чисел обычно обозначается буквой R . Расстояние от точки x до начала отсчета, т.е. точки O , называется абсолютной величиной (или модулем) числа x . (Отсюда определение модуля числа x можно

записать следующим образом: $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$). Расстояние между точками x

и y на числовой оси равно $|x - y|$.

Для любых двух действительных чисел a и b имеет место неравенство треугольника

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (1)$$

Равенство в (1) осуществляется лишь тогда, когда a и b имеют одинаковые знаки. Неравенство (1) распространяется на любое конечное число слагаемых $a, b, \dots, c$:

$$|a + b + \dots + c| \leq |a| + |b| + \dots + |c|.$$

Из неравенства (1) вытекает еще одно полезное неравенство:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad (2)$$

Действительные числа называют также *вещественными* числами. Термин “действительное число” исторически сложился для отличия данных чисел от некоторых более сложных по своей природе чисел, которые назывались “мнимыми”, воображаемыми; в настоящее время такие числа называют комплексными.

Упражнения

1. Какими будут числа $3/7$; $0,793$; рациональными или иррациональными?
2. Как вы понимаете взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами?
3. Проверьте неравенство треугольника и неравенство (2) для $a = 9$; $b = -5$.
4. Найдите расстояние между точками $a = 0,38$ и $b = -0,73$ на прямой. (Ответ: 1,11).

1.2. Множества

Совокупность, набор каких-то предметов называют в математике **множеством**; например, множество стульев в комнате, множество лампочек в люстре, множество целых чисел, множество всех действительных чисел и т.д. Данное описание понятия множества, помогая раскрыть содержание этого понятия, не претендует на то, чтобы служить точным математическим определением. Понятие множества является одним из тех первоначальных, наиболее общих понятий в математике, которые приходится принимать без определения. В частности, в нашем описании этого понятия слова “совокупность”, “набор” являются синонимами термина “множество”.

Предметы, составляющие множество, называются **элементами множества** или точками. То, что элемент a входит в множество A , записывается так: $a \in A$.

Запись $a \notin A$ (или $a \notin A$) означает, что элемент a не принадлежит множеству A . Термин "множество" употребляется независимо от того, много или мало в этом множестве элементов. Существуют множества, содержащие бесконечное количество элементов. Примерами таких множеств могут служить: множество всех натуральных чисел (т.е. целых положительных), множество всех целых чисел, множество рациональных чисел, множество иррациональных чисел, множество всех действительных чисел и т.д. Есть множества, состоящие из конечного числа элементов, например, множество студентов на лекции. Приходится рассматривать и множества, не содержащие ни одного элемента. **Множество**, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\emptyset$. Например, множество действительных чисел, являющихся корнями уравнения $x^2 + 1 = 0$, является пустым.

1.3. Интервалы

8 2

Если a и b – два действительных числа и $a < b$, то множество всех чисел x , которое удовлетворяет неравенствам $a < x < b$, называется **открытым интервалом** и обозначается (a, b) . Открытый интервал не имеет ни наименьшего, ни наибольшего числа: какое бы число $x \in (a, b)$ мы не взяли, обязательно на этом интервале найдутся такие x' и x'' , что $x' > x$ и $x'' < x$. Множество всех точек любого интервала (a, b) является бесконечным (рис.2). **Замкнутый интервал** $[a, b]$ состоит из всех чисел x , для которых $a \leq x \leq b$. Таким образом, замкнутый интервал $[a, b]$ получается из открытого интервала (a, b) присоединением к (a, b) его концов a и b . Интервал $[a, b)$ состоит из точек

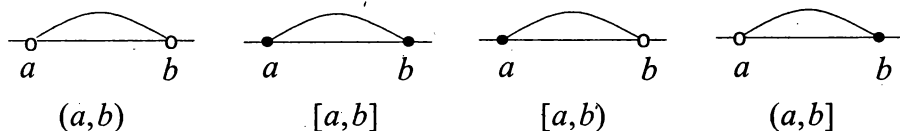


Рис. 2

$x: a \leq x < b$, а интервал $(a, b]$ из точек $x: a < x \leq b$. Эти интервалы иногда называют полузамкнутыми или полуоткрытыми.

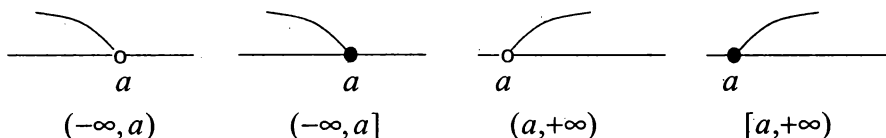


Рис. 3

Интервал $(-\infty, a)$ (или $(-\infty, a]$) – это множество всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $x < a$ (или $x \leq a$) (рис.3). Интервалы $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$ определяются аналогично: это множества $x \geq a$ или $x > a$.

Интервал $(-\infty, +\infty)$ – это множество R всех действительных чисел. Фигурирующие в этих обозначениях символы $-\infty$ и $+\infty$ (читаются "минус бесконечность" и "плюс бесконечность") ни в коем случае нельзя понимать как действительные числа. Наличие символа $(+\infty)$ в обозначении интервала означает, что интервал содержит все достаточно большие числа [например, интервал $(a, +\infty)$ содержит все числа, большие a], в том числе и сколь угодно большие положительные числа. Геометрически это означает, что интервал неограниченно простирается вправо. По аналогии с обычным интервалом можно записать, что интервал $(a, +\infty)$ состоит из всех чисел x – таких, что $a < x < +\infty$. Но фигурирующее в этой записи неравенство $x < +\infty$ означает лишь, что x – любое действительное число, поэтому интервал $(a, +\infty)$ задается на самом деле одним неравенством $x > a$. Точно так же наличие символа $(-\infty)$ в обозначении интервала означает, что в этот интервал входят все достаточно большие по абсолютной величине отрицательные числа, в том числе и сколь угодно большие по абсолютной величине. Неравенство $x > -\infty$, равно как и неравенство $-\infty < x < +\infty$, означает, что x – произвольное действительное число. Интервалы, у которых хотя бы один конец находится в бесконечности, называются **несобственными**.

Окрестностью точки x_0 называется любой открытый интервал, содержащий эту точку (рис.4). Открытый интервал (a, b) служит окрестностью всякой принадлежащей ему точки.

Возьмем какое-либо положительное число ε (ε – буква греческого алфавита, читается "эпсилон"). **ε -окрестностью** (эпсилон-окрестностью) **точки x_0** называется открытый интервал с центром в точке x_0 длиной 2ε , т.е. интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (рис.5). ε -окрестность точки x_0 можно также задать

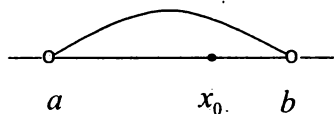


Рис. 4

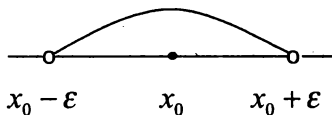


Рис. 5

неравенством $|x - x_0| < \varepsilon$.

Упражнения

1. Запишите в виде интервалов: множество всех x , удовлетворяющих неравенствам $-5 < x < 2$; множество всех y , для которых $0 \leq y \leq 3$; множество всех t , для которых $-\infty < t < 4$; множество всех u , для которых $0 \leq u < +\infty$.

2. Какие интервалы называются несобственными? Перечислите все типы несобственных интервалов (их должно быть 5).

3. Какое из двух понятий является более общим: а) окрестность точки; б) ε -окрестность точки?

4. Дайте определение ε -окрестности точки.

1.4. Понятие величин

Из различных дисциплин известны многие типы величин, описывающих и характеризующих те или иные предметы и явления: углы, длины, площади, объемы – в геометрии; силы, массы, скорости, ускорения – в механике; сила тока, напряженность, температура, теплоемкость и т.д. – в физике и т.п. Все эти величины весьма различны по своим качествам, свойствам, природе. Однако каждую величину можно измерить, т.е. сравнить с некоторой другой, однородной с первой, величиной, принятой за единицу. Как происходит процесс измерения, зависит от того, какова природа измеряемой величины, но в результате измерения всегда возникает число (отвлеченное), характеризующее измеряемую величину, называемое ее численным значением или просто значением измеряемой величины. Например, величина S площади прямоугольника равна $1,5 \text{ м}^2$ – результат сравнения S с единицей измерения площадей – квадратным метром; число 1,5 – значение величины S .

Изучая величины, в математике отвлекаются, абстрагируются от их конкретной природы и сосредотачивают внимание только на численных значениях величин. Полученные в математике результаты исследования абстрактного понятия величины применимы ко всем конкретным величинам любой природы.

1.5. Переменные и постоянные величины

6.1. Величина x называется **переменной**, если она принимает различные значения. Если величина x все время сохраняет одно и то же численное значение, то она называется **постоянной**. Поскольку все в окружающем нас мире находится в непрерывном движении, изменении, ясно, что большинство величин, характеризующих происходящие в материальном мире процессы и явления, являются переменными. Что касается постоянных величин, то они могут быть

постоянными всегда (например, сумма углов всякого треугольника равна π) либо только в данном процессе, в другом процессе они могут оказаться переменными (например, автомобиль может двигаться с постоянной скоростью v_0 и с меняющейся скоростью v). В математическом анализе *постоянные* величины рассматриваются как *частный случай переменных* величин: это такие “переменные”, которые всегда или по крайней мере в данном процессе принимают одно и то же значение.

1.6. Область значений переменной величины

6.1. Множество всех значений переменной величины составляет ее **область значений**. Областью значений переменной часто бывает интервал.

Пример. Точка M (рис.6) движется по окружности радиуса $r = 1$ с центром в начале координат.

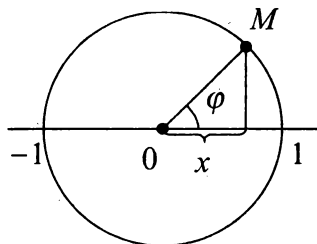


Рис. 6

Если считать, что точка совершила по крайней мере один полный оборот, то область значений ее абсциссы x есть замкнутый интервал $[-1; 1]$. Если движение началось с положения $\varphi = 0$, происходит против часовой стрелки и сделано k полных оборотов, то область значений переменной величины φ – некоторый интервал $[0; 2\pi k]$. Область значений переменной $\operatorname{tg} \varphi$ есть $(-\infty; +\infty)$.

Однако областями значений переменных величин могут быть и другие множества, отличные от интервалов и их объединений. Например, если x – количество деталей, изготовленных рабочим за смену, то x может принимать

лишь целые и неотрицательные значения, но не $\sqrt{2}$. Область значений этой переменной величины не является интервалом.

Часто важно знать не только область значений переменной, но и в каком порядке переменная принимает значения: какие из этих значений принимаются раньше, а какие позже.

Пример. Вернемся к рис. 6. Если точка M совершает половину оборота против часовой стрелки, т.е. от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$, то $x = \cos \varphi$ убывает от 1 до -1 . Область значений x – интервал $[-1; 1]$, пробегаемый справа налево. Если же точка M совершает половину оборота от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 2\pi$, то x возрастает от -1 до $+1$, и область значений $[-1; 1]$ пробегается слева направо. Если точка M делает один полный оборот, то область значений x – все тот же интервал $[-1; 1]$, но он пробегается дважды.

Далеко не для всех типов переменных величин бывает просто указать, какое из их значений какому предшествует и за каким следует. Однако этот вопрос просто и естественно решается для одного важного класса переменных величин – так называемых последовательностей.

1.7. Последовательности

Предположим, что все значения, принимаемые переменной величиной x , можно пронумеровать с помощью всевозможных натуральных (целых положительных) чисел: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, причем значение с большим номером принимается после значения с меньшим номером: если $n < m$, то значение x_n предшествует значению x_m , в частности x_n предшествует x_{n+1} . В этом случае говорят, что переменная x пробегает **последовательность** значений

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (3)$$

или что имеется последовательность (или числовая последовательность) (3). Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называются **членами** последовательности: x_1 – первый член, x_2 – второй и т.д. Число x_n с произвольным номером n называется **общим членом** последовательности. Последовательность определена, если мы знаем закон, по которому для любого номера n образован соответствующий член x_n последовательности. Иными словами, если мы знаем закон зависимости общего члена x_n от его номера n . Последовательность часто обозначают $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$.

Примеры:

$$1. x_1 = 1; x_2 = 2; \dots; x_n = n; \dots$$

$$2. x_1 = \frac{2}{1}; x_2 = \frac{3}{2}; \dots; x_n = \frac{n+1}{n}; \dots$$

$$3. x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 1; x_4 = -1; \dots; x_n = (-1)^{n-1}; \dots$$

$$4. x_1 = 5; x_2 = 5; \dots; x_n = 5; \dots$$

Мы видим, что члены последовательности не обязаны все быть разными числами: область значений последовательности в примере 3 состоит из двух значений: -1 и 1 . Переменная, пробегающая последовательность в примере 4 оказывается на самом деле постоянной.

1.8. Логические символы

Математические предложения могут быть записаны в краткой символической форме. Для этого применяются следующие специальные символы:

$\forall$ – “любой”, “для всех”, “каков бы ни был”. Символ $\forall$ – перевернутая буква А – начальная буква слова “All” – “все”. Символ $\forall$ называется квантором общности. Примеры записей: $\forall x \in A$ – любой элемент множества A , для каждого элемента множества A ; $\forall \alpha > 0$ – для любого положительного числа α ;

$\exists$ – “существует”, “найдется”. Это квантор существования. $\exists$ – перевернутая буква Е – начальная буква слова “Existenz” – “существует”. Примеры записей: $\exists x$ – существует такое x , что ...; $\exists x \in A$ – существует такой элемент множества A , что...; $\exists \alpha > 0$ – существует такое положительное число α , что...;

$\Rightarrow$ – “влечет за собой” – логическое следствие. Запись $P \Rightarrow Q$ означает, что из некоторого утверждения P вытекает утверждение Q (если имеет место P , то имеет место и Q). Например, $x > 3 \Rightarrow x > 0$;

$\Leftrightarrow$ – “эквивалентно”, “равносильно”, логическая равносильность. Равносильность двух утверждений P и Q означает, что $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$. Примеры записей: $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$ – любой элемент множества B содержится в множестве A , т.е. B – часть A , содержится в A ; $\forall x: x \in B \Leftrightarrow x \in A$ – для любого x принадлежность множеству B равносильна принадлежности множеству A , т.е. A и B состоят из одинаковых элементов, совпадают: $A = B$.

§2. Функция. График функции

2.1. Функция

(60 н ч.)

Переменная величина, характеризующая какой-то процесс, обычно возникает не индивидуально, а в связи с другими переменными величинами. Дело в том, что процессы, протекающие в окружающем мире, являются достаточно сложными и характеризуются многими переменными величинами, связи между которыми и составляют закономерности, проявляющиеся в ходе данного процесса. Кроме того, любой процесс происходит не изолированно, а во взаимодействии с другими процессами.

Пример. Состояние газа при фиксированной температуре характеризуется давлением P и объемом V , занятым газом. Эти переменные величины связаны

зависимостью $p \cdot v = C$, где C – постоянная (закон Бойля-Мариотта).

Математическую основу изучения связей между переменными величинами составляет понятие функциональной зависимости переменных величин или понятие функции.

Переменная величина y называется **функцией** переменной величины x , если каждому значению x по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное значение y .

Таким образом, изменению величины x отвечает определенное изменение y . Переменную величину x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а величину y – **зависимой переменной** или **функцией**.

Записывают это так: $y = f(x)$. Иногда говорят, что переменные x и y связаны функциональной зависимостью. Для обозначения функциональных зависимостей применяются и другие буквы: $y = F(x)$; $y = \varphi(x)$; $Z = f(t)$; $v = \Psi(u)$ и т.д.

Запись функции $y = F(x)$ можно понимать и так: x – независимая переменная величина, y – зависимая от x переменная (т.е. функция от x), а F – **закон соответствия**, т.е. обобщенная запись тех операций, которые надо проделать над значением аргумента x , чтобы получить соответствующее значение функции y . Буква f (или F) употребляется для обозначения функции чаще других, так как является первой буквой слова “funktion” – “функция”. Иногда функции записываются и так: $y = y(x)$; $Z = Z(t)$ и т.д. При таких записях как бы “экономят” букву: и значение функции, и закон соответствия обозначают одной буквой. Понятие функции является основным понятием математического анализа.

Что надо знать, чтобы была задана функция? Прежде всего должна быть известна область значений аргумента x . Эта область значений аргумента называется **областью определения функции**. Затем мы должны знать, как по любому значению x из области определения находится соответствующее ему значение $y = f(x)$. Правило $x \rightarrow f(x)$, согласно которому по любому значению x из области определения находится соответствующее этому x значение $y = f(x)$, называется **законом соответствия** для данной функциональной зависимости.

Таким образом, для того чтобы функция была определена, надо знать: а) область определения; б) закон соответствия. Обычно функция задается аналитически – какой-нибудь формулой. Иногда закон соответствия задается разными формулами на разных участках ее области определения.

Примеры:

1. Площадь круга радиуса x : $y = \pi x^2$. Область определения этой функции

4.)

$x \geq 0$, т.е. $x \in [0; +\infty]$; закон соответствия задан формулой $x \rightarrow \pi x^2$.

$$2. y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in [-1; 0) \\ 2x & \text{при } x \in [0; 1] \end{cases}$$

Область определения этой функции – отрезок $[-1; 1]$; закон соответствия задан разными формулами на разных участках: $x \rightarrow x^2$ при $x \in [-1; 0)$ и $x \rightarrow 2x$ при $x \in [0; 1]$.

3. Рассмотрим какую-либо последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Ее можно представить как функцию, областью определения которой служит множество натуральных чисел $1, 2, \dots, n, \dots$. Закон соответствия $n \rightarrow y_n = f(n)$, т.е. в этом случае это тот закон, согласно которому мы можем найти член y_n последовательности по любому номеру n .

Область определения функции $y = f(x)$ – это, как было сказано выше, область значений аргумента x . Множество значений, принимаемых функцией, составляет ее **область значений**. Таким образом, область значений функции – это область значений зависимой переменной величины y . Область значений функции обычно не сообщается заранее, как это делается с областью определения, а находится в процессе изучения поведения функции.

4. $y = \sqrt{x}; x \in [0; 4]$. Область определения $[0; 4]$. Область значений $[0; 2]$.

2.2. График функции

Пусть задана функция $y = f(x)$. Возьмем на плоскости систему декартовых координат XOY . Рассмотрим множество Γ точек на плоскости $M(x; f(x))$, абсциссами которых являются значения аргумента x , а ординатами – соответствующие значения функции $f(x)$. Множество Γ называется

графиком функции $f(x)$ (рис. 7).

Построение графика функции дополняет аналитический (или какой-нибудь другой) способ задания функции, так как делает наглядным ход ее изменения. Во многих технических устройствах график функции возникает и как самостоятельный способ задания

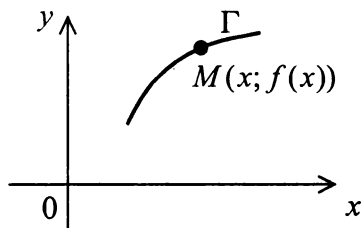


Рис. 7

функции. Приборы вычерчивают график зависимости одной величины от другой (чаще всего от времени).

Обычно мы представляем себе график функции в виде какой-то линии. Так, действительно, бывает чаще всего, но не всегда. Рассмотрим последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Мы уже знаем, что последовательность можно трактовать как функцию $y = f(n), n = 1, 2, \dots$. Построим график этой функции (рис. 8). Он состоит из отдельных точек, а линией не является.

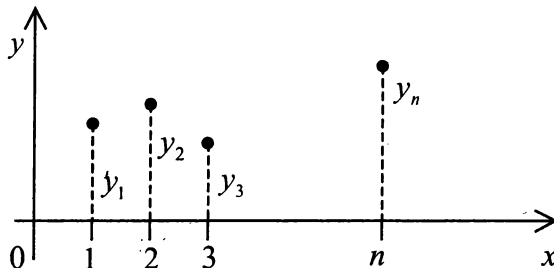


Рис. 8

§3. Элементы поведения функции

3.1. Ограниченные величины и функции

Переменная величина x называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что все значения x попадают в интервал $[-M, M]$. Иными словами, для всех значений x выполняется неравенство

$$|x| \leq M.$$

Для функции $y = f(x)$ ограниченность означает выполнение неравенства

$$|f(x)| \leq M$$

(4)

при всех x из области определения. Геометрически условие (4) означает, что все точки графика функции лежат в горизонтальной полосе между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (рис. 9).

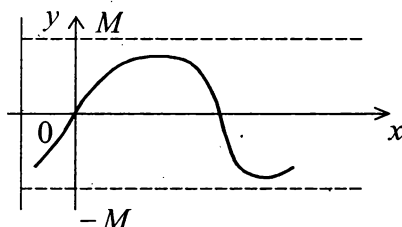


Рис. 9

Так, например, $y = \sin x$

ограниченная функция, так как $|\sin x| \leq 1$ при всех x .

Иногда говорят об ограниченности функции лишь на некотором интервале, являющемся частью области определения; это значит, что условие (4) выполняется для рассматриваемого интервала; число M может зависеть от взятого интервала.

Пример. $y = \frac{1}{x}$ – функция, не являющаяся ограниченной. В самом деле,

какое бы $M > 0$ мы не взяли, для тех x , для которых $|x| < \frac{1}{M}$, будет

выполняться неравенство $\left| \frac{1}{x} \right| > M$ (рис.10). В то же время на любом интервале

$[a; +\infty)$ ($a > 0$) эта функция ограничена: $\left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{a}$ (рис.11). Число $M = \frac{1}{a}$ зависит от этого интервала.

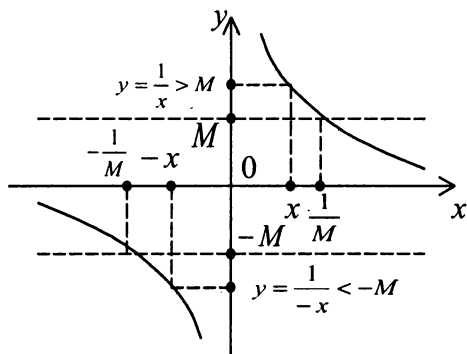


Рис. 10

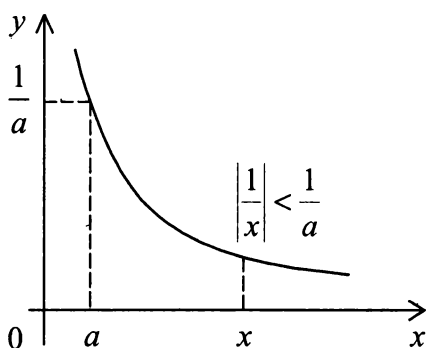


Рис. 11

3.2. Возрастание и убывание функций на интервале

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует большее значение функции (рис.12).

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на некотором интервале, если для любых двух значений аргумента, взятых на этом интервале, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (рис.13).

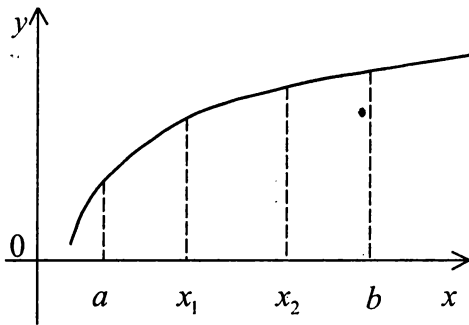


Рис. 12

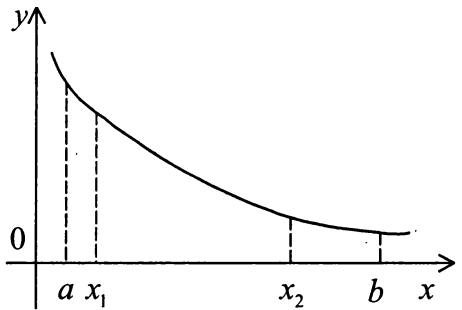


Рис. 13

Запишем эти определения с помощью логических символов – кванторов: для интервала $[a, b]$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – условие возрастания; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – условие убывания.

Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется *интервалом монотонности* этой функции, а про функцию говорят, что она *монотонна* на этом интервале.

Пример. $y = x^2$ (рис.14). Интервалы монотонности: на $(-\infty; 0)$ функция убывает; на $(0; +\infty)$ функция возрастает.

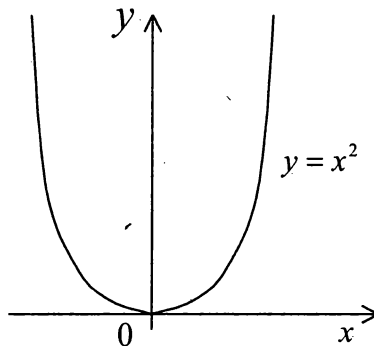


Рис. 14

Исследование функций на монотонность с помощью данных выше определений может быть затруднительно. Поэтому в дифференциальном исчислении будут даны удобные для практического применения признаки монотонности.

3.3. Четные и нечетные функции

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D .

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если выполняется условие

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D; \quad (5)$$

функция $f(x)$ называется *нечетной*, если

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D. \quad (6)$$

В этих определениях, конечно, предполагается, что область определения D функции $f(x)$ симметрична относительно начала координат. [Например, D есть интервал $(-a; a)$ или $(-\infty; +\infty)$]. Симметрия области определения относительно начала координат означает, что наряду с некоторой точкой x область определения обязательно содержит точку $(-x)$.

Примеры:

1. $f(x) = x^4$. Область определения $(-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат. $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$. Функция четная.

2. $f(x) = x^3 + 5x$. Область определения $(-\infty; +\infty)$. Функция нечетная.

3. $f(x) = \frac{1}{x}$. Область определения $(-\infty; 0); (0; +\infty)$ (два интервала) симметрична относительно начала координат (множество всех действительных чисел с выброшенным нулем). $f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -f(x)$. Функция нечетная.

4. Из тригонометрии известно, что $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ – нечетные функции; $\cos x$ – четная функция.

Геометрически четность функции означает, что ее график симметричен относительно оси ординат. Действительно, наряду с точкой $M(x; f(x))$ график содержит точку $M'(-x; f(-x))$, так как $f(-x) = f(x)$, точка M' имеет координаты $(-x; f(x))$. Точки M и M' оказались симметричными относительно оси ординат (рис. 15). Таким образом, наряду с произвольной точкой M график четной функции содержит и точку, симметричную ей относительно оси ординат, а значит, и весь график четной функции симметричен относительно

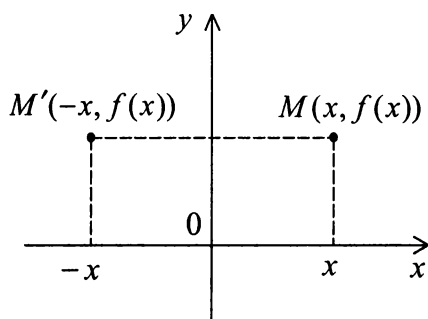


Рис. 15

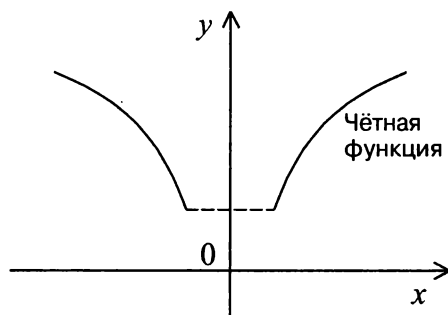


Рис. 16

оси Oy (рис.16).

Рассуждая аналогичным образом, можно установить, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис.17 и 18).

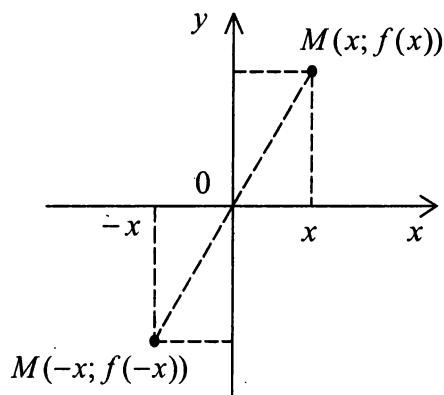


Рис. 17

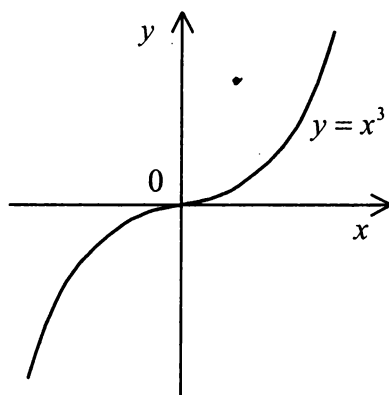


Рис. 18

Не следует думать, что функция, не являющаяся четной, должна быть обязательно нечетной. Чаще всего приходится иметь дело с функциями, не являющимися ни четными, ни нечетными; эти функции иногда называют функциями общего вида. Их графики не обладают симметрией ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат.

Примеры:

1. $f(x) = 5x^3 - x^2; x = (-\infty; +\infty)$. Пусть $x=1$ и $x=-1$, тогда $f(1) = 5 - 1 = 4$; $f(-1) = -5 - 1 = -6$; т.е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$, значит, рассматриваемая функция не является ни четной, ни нечетной.

2 $f(x) = 2^x; x = (-\infty; +\infty)$. Пусть $x=1$ и $x=-1$, тогда

$f(1) = 2; f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, т.е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Таким образом, эта функция является функцией общего вида.

3.4. Период. Периодические функции

Число $l \neq 0$ называется *периодом* функции $f(x)$ с областью определения D , если

$$f(x+l) = f(x) \quad \forall x \in D. \quad (7)$$

Функция $f(x)$, обладающая периодом, называется *периодической*. Условие (7) предполагает, конечно, что наряду с любым $x \in D$ и $x+l \in D$.

Если число l – период функции $f(x)$, то и любое целое, кратное l , т.е. число kl , где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, будет периодом $f(x)$. Например, $f(x+2l) = f((x+l)+l) = f(x+l) = f(x)$, т.е. $2l$ – период; $f(x-l) = f((x-l)+l) = f(x)$, т.е. $(-l)$ тоже период. Наиболее важным является наименьший положительный период, так как можно показать, что все другие периоды функции будут ему кратны. Поэтому в дальнейшем название периода функции будем применять именно к наименьшему положительному периоду.

Факт наличия периода у функции достаточно редок.

Пример. Из тригонометрии известно, что периоды функций $\sin x$ и $\cos x$ равны 2π , а периоды $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равны π .

График периодической функции с периодом l достаточно построить на каком-либо интервале с длиной, равной периоду, а затем построенную часть графика сдвигать вдоль оси Ox на $l; -l; 2l; -2l$ и т.д. (рис.19).

Пример. Периодична ли функция $y = 2^x$ (показательная)? Допустим, что периодична. Тогда

$\exists l \neq 0$, при этом для любого x $2^x = 2^{x+l}$; отсюда $2^l = 1 \Rightarrow l = 0$.

Рис. 19

Это противоречит нашему предположению о существовании периода, значит, предположение неверно. Функция $y = 2^x$ не является периодической.

§4. Сложная функция (функция от функции). Обратная функция. неявная функция. Параметрическое задание функции. Элементарные функции

4.1. Сложная функция (функция от функции)

Пусть дана функция $y = f(x)$ от аргумента x , причем аргумент x , в свою очередь, является функцией от независимой переменной t :

$$y = f(x); x = \varphi(t). \quad (8)$$

Возьмем какое-либо значение t . В силу функциональной зависимости x от t этому значению t отвечает определенное значение x : $x = \varphi(t)$. Полученному значению x , в свою очередь, отвечает определенное значение y : $y = f(x)$ (рис.20).

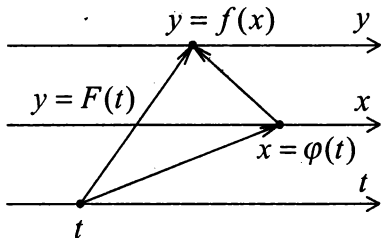


Рис. 20

На рис.20 переменные t, x, y откладываются на трех осях, изображенных параллельно. В конечном итоге взятому значению t соответствует определенное значение y , т.е. переменная y оказалась функцией независимой переменной t : $y = F(t)$. Используя (8), получаем $y = F(t) = f(\varphi(t))$. Функция $F(t)$

называется *сложной функцией* от независимой переменной t или функцией от функции (функция f от функции φ). При этом функция $y = f(x)$ называется *заданной* или *внешней функцией*, а $x = \varphi(t)$ – *промежуточным аргументом*. Функции f и φ называют еще *составляющими* для сложной функции F ; говорят также, что F является *суперпозицией* функций f и φ . Чтобы образовать функцию от функции, нужно, чтобы область значений промежуточной переменной $x = \varphi(t)$ “укладывалась” в область определения заданной функции $y = f(x)$ (рис.21). В противном случае среди значений функции $x = \varphi(t)$ будут и такие, от которых значение функции $f(x)$ образовать нельзя (рис.22). В таких случаях сложную функцию (или функцию от функции) можно задать только для тех значений независимой переменной t , для которых значения промежуточной переменной

$x = \varphi(t)$ попадают в область определения внешней функции $y = f(x)$.

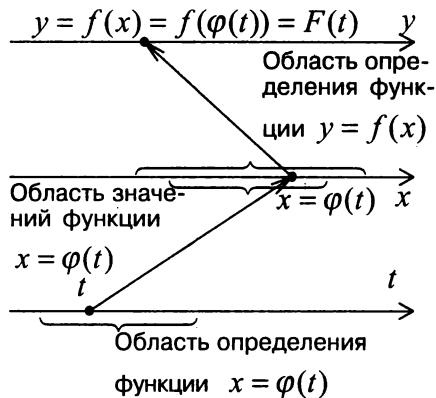


Рис. 21



Рис. 22

Примеры:

1. $f(x) = \log_2 x$; $x = \varphi(t) = \sin t$. Область значений промежуточной переменной $\varphi(t)$ – отрезок $[-1; 1]$; он не укладывается в область определения внешней функции $f(x) = \log_2 x$ [ее область определения $(0; +\infty)$]. Поэтому сложную функцию $y = f(\varphi(t)) = \log_2 \sin t$ можно образовать только для тех значений аргумента t , для которых $\sin t > 0$.

2. $f(x) = \lg x$; $x = \varphi(t) = -t^2 - 1$. Здесь область значений промежуточного переменного $(-\infty; -1)$, а область определения внешней функции $f(x) = \lg x$ – $(0; +\infty)$. Значит, в этом случае образовать сложную функцию [т.е. суперпозицию функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$] нельзя.

3. $y = x^2$; $x = \sin t$; $F(t) = \sin^2 t$.

4. $y = 2^{-x} x = \log_2 t$; $F(t) = 2^{-\log_2 t} = \frac{1}{t}$.

В этих примерах область определения заданных функций (x^2 и 2^{-x}) – вся числовая ось, значит, область значений промежуточного аргумента в нее обязательно укладывается.

Полезно уметь раскладывать сложную функцию на составляющие, т.е. уметь находить функцию и промежуточный аргумент.

Примеры:

1. $y = F(t) = \cos^2 t$, составляющие $y = x^2$; $x = \cos t$.

2. $y = \log_2(3t+1)$, составляющие $y = \log_2(x)$; $x = 3t+1$.

Сложные функции могут быть образованы и из большего числа составляющих.

Примеры:

1. $y = x^3$; $x = \sin t$; $t = 3u+1$; $y = F(u) = (\sin(3u+1))^3$. Здесь два промежуточных аргумента x и t , независимая переменная u .

2. $y = 2^{-(4u^3+1)}$; $y = 2^{-x}$; $x = -4t-1$; $t = u^3$.

Упражнения

1. $y = x^3$; $x = \sin t$. Образуйте сложную функцию.

2. $y = u^2 - 1$; $u = 3t+1$; $t = 4x$. Образуйте суперпозицию этих трех составляющих.

3. Разложите на составляющие: а) $y = \cos(2t-5)$; б) $y = 2^{-t^2}$; в) $y = 4^{-x^2} + 1$; г) $y = \cos(4^{-x^2} + 1)$; д) $y = \log_3(tg(5u+2))$.

(Ответы: 1. $y = \sin^3 t$. 2. $y = (12x+1)^2 - 1$. 3. а) $y = \cos x$; $x = 2t-5$; б) $y = 2^{-x}$; $x = t^2$; в) $y = t+1$; $t = 4u$; $u = -x^2$; г) $y = \cos z$; $z = t+1$; $t = 4u$; $u = -x^2$; д) $y = \log_3 z$; $z = tg t$; $t = 5u+2$).

4.2. Обратная функция

Пусть на некотором интервале X задана функция $y = f(x)$, область значений которой обозначим Y . Согласно определению функции каждому значению $x \in X$ соответствует определенное значение $y = f(x)$, $y \in Y$. Если же интервал X является интервалом монотонности для $f(x)$, то и каждому значению $y \in Y$ отвечает одно вполне определенное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (рис.23). Таким образом, в этом случае функциональная зависимость между X и Y может рассматриваться и как функция $x = \varphi(y)$, т.е. y можно рассматривать как аргумент, а x – как функцию. У функции $x = \varphi(y)$ областью определения является Y , а областью значений – X .

Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ называются *взаимно обратными*: $x = \varphi(y)$ – обратная функция к функции $y = f(x)$; $y = f(x)$ – обратная функция к функции $x = \varphi(y)$. Уравнение $x = \varphi(y)$ получается в результате разрешения, если это возможно, уравнения $y = f(x)$ относительно переменной x .

Если f и φ – взаимно обратные функции, то имеют место тождества (рис.24)

$$f(\varphi(y)) \equiv y; \varphi(f(x)) \equiv x. \quad (9)$$

Графиком функции $x = \varphi(y)$ является та же линия, которая изображала функцию $y = f(x)$: ведь уравнение $x = \varphi(y)$ – просто иначе переписанное уравнение $y = f(x)$:

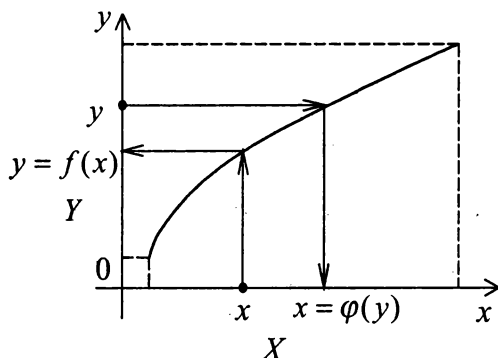


Рис. 23

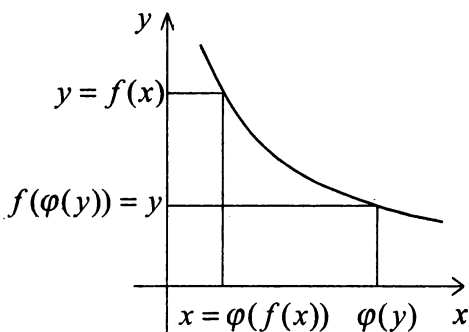


Рис. 24

Примеры:

1. $y = 2^x$; $x = \log_2 y$ – обратная к ней функция. Областью определения функции $y = 2^x$ является $X = (-\infty; +\infty)$, этот же интервал является областью значений обратной функции $x = \log_2 y$. Областью значений функции $y = 2^x$ служит интервал $(0; +\infty)$, он же является областью определения для $x = \log_2 y$ (рис.25). Обратная функция в этом примере существует потому, что $y = 2^x$ – возрастающая функция на всей числовой оси.

2. $y = x^3$; $x = \sqrt[3]{y}$; $X = (-\infty; +\infty)$; $Y = (-\infty; +\infty)$ (рис.26).

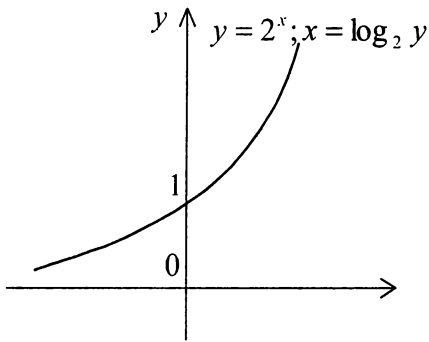


Рис. 25

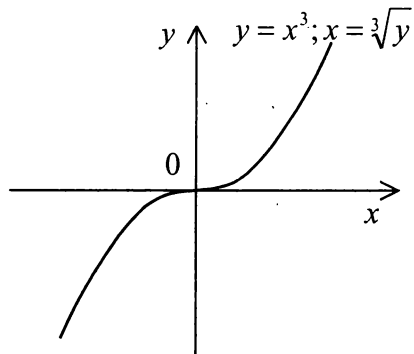


Рис. 26

Функция $x = \varphi(y)$ несколько неудобна тем, что, вопреки привычному, ее аргументом является y , а не x , и значением функции служит x , а не y . Неудобство это скорее психологического характера, однако, чтобы его избежать, наряду с функцией $x = \varphi(y)$ рассматривают функцию $y = \varphi(x)$, которую также называют *обратной* функцией к функции $y = f(x)$: Функция $y = \varphi(x)$ получается из $x = \varphi(y)$ переменой ролей x и y :

$$y = f(x); \underbrace{x = \varphi(y); y = \varphi(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{обратные функции к } y = f(x)}}.$$

Примеры:

$$1. \ y = 2^x; \underbrace{x = \log_2 y; y = \log_2 x}_{\substack{\uparrow \\ \text{обратные функции к } y = 2^x}}.$$

$$2. \ y = x^3; \underbrace{x = \sqrt[3]{y}; y = \sqrt[3]{x}}_{\substack{\uparrow \\ \text{обратные функции к } y = x^3}}.$$

График Γ' обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику Γ функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

В самом деле, чтобы построить график функции $y = \varphi(x)$, надо как бы

поменять местами координатные оси Ox и Oy . Этого можно достичь, перегнув плоскость по биссектрисе первого и третьего координатных углов. При таком перегибании плоскости график нашей функции отобразится симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис.27). На рис.28 показаны графики взаимно обратных функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$.

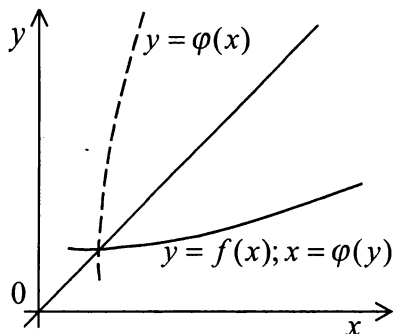


Рис. 27

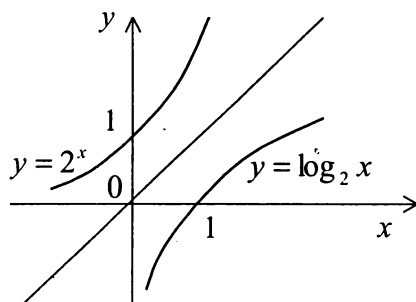


Рис. 28

Возникает вопрос: можно ли говорить об обратной функции, если исходная функция $y = f(x)$ не является монотонной? Из рис.29 видно, что отсутствие монотонности сейчас же приводит к очень серьезному осложнению: некоторым $y \in Y$ соответствует несколько значений x . Значит, в этом случае нельзя говорить об обратной функции $x = \varphi(y)$. Выход из этого затруднения следующий: можно рассматривать заданную функцию не на всей области ее определения, а выделить из нее какой-то интервал монотонности и им ограничиться. На рис. 29 это, например, интервал $[a; b]$; $f(x)$ на нем убывает, и для взятого y найдется единственная отвечающая ему точка x интервала $[a; b]$ (на чертеже x_2).

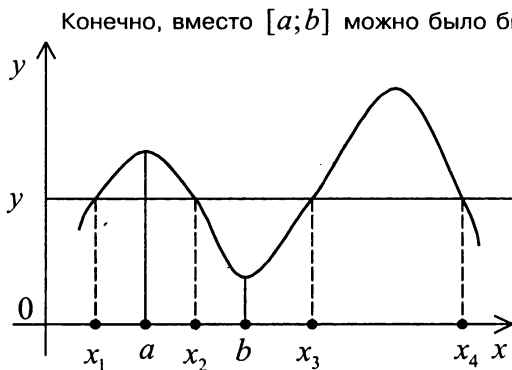


Рис. 29

Конечно, вместо $[a; b]$ можно было бы взять и какой-то другой интервал монотонности и на нем построить функцию, обратную данной. (Вообще, разбив весь интервал, на котором рассматривается функция, на интервалы, в каждом из которых она монотонна, на каждом из интервалов монотонности можно построить обратную функцию). Интервал монотонности, если это возможно, желательно выбирать так, чтобы множество значений, принятых $f(x)$ на этом интервале,

совпало со всей областью значений $f(x)$ [т.е. с множеством значений, принятых $f(x)$ на всей области определения].

4.3. Обратные тригонометрические функции

Пусть $y = \sin x$. Область определения синуса $(-\infty; +\infty)$, но функция, конечно, не монотонна на всей оси. Выбираем интервал $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где $\sin x$ – монотонная функция: она здесь возрастает от -1 (при $x = -\frac{\pi}{2}$) до 1 (при $x = \frac{\pi}{2}$). Обратная функция имеет обозначение $\arcsin$: $x = \arcsin y$ (читается “арксинус игрек”) – это угол (или дуга), взятый в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен y . Если рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, то согласно рис.27 ее график получается симметричным к графику $y = \sin x$ относительно биссектрисы первого координатного угла (график синуса берется только на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

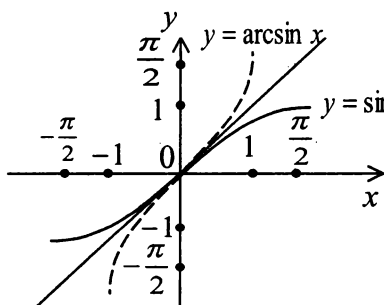


Рис. 30

На рис.30 график

$y = \arcsin x$ – пунктирная линия, а график $y = \sin x$ (он же график $x = \arcsin y$) – сплошная. Аналогичным образом в тригонометрии определяются функции, обратные к

$y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.

Это, соответственно, будут

$y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccot} x$.

4.4. Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие:

$y = x^n$ (n – некоторое действительное число) – степенная; графики

степенной функции для некоторых n – см. рис.10,14,18,26;

показательная функция $y = a^x$, a – положительное число (график см. рис.25);

логарифмическая $y = \log_a x$ – график на рис.28;

тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$;

обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$. Часть графика $y = \sin x$ и график $y = \arcsin x$ даны на рис.30.

Элементарной функцией называется функция, составленная из основных элементарных функций и постоянных чисел путем арифметических действий и взятия функции от функции.

Примеры:

$$1. y = \frac{2^{-x^2} + 4x - 5}{\arcsin(x^3 + 3)}.$$

$$2. y = \frac{\log_3(\cos 2x + 5)}{(x^2 + 1)^{-1/2}}.$$

4.5. Неявные функции

Иногда функциональная зависимость величин y и x задается некоторым уравнением, связывающим x и y , но нерешенным ни относительно y , ни относительно x . Например, уравнение прямой $3x - 2y = 5$. Правда, его очень

просто решить относительно y : $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$, и мы получаем обычное задание функции. Однако уравнение, связывающее x и y , не всегда удастся разрешить относительно y или x . Таково, например, уравнение $y2^x + x2^y - 1 = 0$. Однако и здесь значениям x отвечают определенные значения y (например, значению $x = 0$ отвечает $y = 1$, значению $x = 1$ отвечает $y = 0$). В таких случаях говорят, что функция y – *неявная функция* от x , она задана уравнением, связывающим x и y .

Подобным образом задаются многие кривые в аналитической геометрии. Например, $x^2 + y^2 = 1$ – уравнение окружности (с центром в начале и с радиусом

$r = 1$). Здесь можно явно выразить y через x : $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, но получаются две функции, соответствующие + или – перед корнем (верхняя и нижняя

полуокружности). Точно так же уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ можно считать заданием неявной функции. В самом общем виде уравнение, задающее неявную функцию, можно записать как

$$F(x, y) = 0. \quad (10)$$

где буква F “скрывает” те операции над x и y , которые следует проделать в основной (левой) части уравнения. Исследовать неявные функции почти всегда труднее.

4.6. Параметрическое задание функции

Кривые на плоскости часто задаются **параметрическими уравнениями**. В этих уравнениях координаты x и y точки на кривой выражены как функции третьего, вспомогательного переменного t (*параметра*):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (11)$$

Это новый, иногда наиболее удобный, способ задать функциональную зависимость между x и y . Считаем, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную: $t = \Phi(x)$ [т.е. решаем уравнение $x = \varphi(t)$ относительно t]. Поставив это во второе уравнение, получим:

$$y = \psi(\Phi(x)) = f(x),$$

т.е. y есть функция от x (сложная функция).

Примеры:

$$1. \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

параметрические уравнения: 1) окружности радиуса r , 2) эллипса с полуосями a и b .

Весьма часто параметрическое задание линии возникает в механике. Там x и y – координаты движущейся точки, меняющиеся в зависимости от времени t , а линия – траектория этой точки.

§5. Предел переменной величины. Предел функции

5.1. Предел переменной величины

Из разнообразных способов поведения переменных величин наиболее важен тот, при котором переменная величина стремится к некоторому пределу. В этом случае значения, принимаемые переменной величиной x , становятся сколь угодно близкими к некоторому постоянному числу a – пределу этой переменной величины. Говорят, что переменная величина стремится, неограниченно приближается к постоянному числу a (своему пределу). Дадим более подробно соответствующее определение.

Переменная величина x стремится к пределу a (a – постоянное число), если абсолютная величина $|x - a|$ разности между x и a становится в процессе изменения переменной величины сколь угодно малой.

То же самое определение можно сказать и другими словами.

*Постоянное число a называется **пределом переменной величины x** , если $|x - a|$ – абсолютная величина разности между x и a становится в процессе изменения переменной величины x сколь угодно малой.*

Тот факт, что число a является пределом переменной величины, записывается следующим образом:

$$a = \lim x \quad (\lim - \text{первые буквы слова limes} - \text{предел}) \text{ или } x \rightarrow a.$$

Уточним, что следует понимать под словами “величина $|x - a|$ становится сколь угодно малой”, имеющимися в определении предела. Зададимся произвольным положительным числом ε ($\varepsilon > 0$), тогда, если $a = \lim x$, то, начиная с некоторого момента в изменении переменной величины x , значения $|x - a|$ сделаются и будут становиться меньше, чем это ε : $|x - a| < \varepsilon$. С приведенным сейчас уточнением термина “сколь угодно мала” определение предела читается так: *переменная величина x стремится к пределу a , если для любого положительного ε , начиная с некоторого момента в изменении переменной x , выполняется неравенство $|x - a| < \varepsilon$.*

Определение предела имеет простой геометрический смысл: неравенство $|x - a| < \varepsilon$ означает, что x находится в ε -окрестности точки a , т.е. в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ (рис.31). Таким образом, мы можем дать определение предела в следующей геометрической форме: *число a является пределом переменной величины x , если для любой (произвольно малой) ε -окрестности числа a можно*

указать такой момент в изменении переменной x , начиная с которого все ее значения попадают в указанную ε -окрестность точки a .

Необходимо представлять себе процесс приближения к пределу в динамике. Взяли некоторую ε -окрестность точки a ; начиная с некоторого момента в изменении x , все значения x попадают в эту окрестность. Теперь возьмем более тесную ε_1 -окрестность точки a ($\varepsilon_1 < \varepsilon$); начиная с некоторого (более отдаленного в сравнении с первым) момента в изменении x , все ее значения попадут в ε_1 -окрестность точки a и т.д. (рис.32).

Введя определение предела переменной величины, мы постарались его

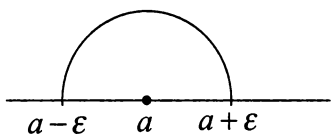


Рис. 31

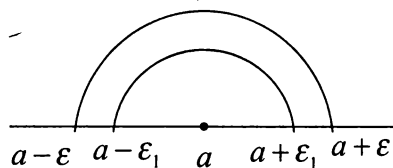


Рис. 32

подробно обсудить и расшифровать. Однако в этом определении осталась нераскрытой одна, весьма существенная, деталь: что следует понимать под словами “начиная с некоторого момента в изменении переменной величины x ”? Это ясно тогда, когда процесс изменения переменной протекает во времени: начиная с некоторого момента (времени). Но не всегда мы имеем дело с переменными величинами, изменение которых протекает во времени. Как же быть в этих случаях? Выход состоит в расшифровке этого места в общем определении предела переменной специфическим образом для каждого типа переменных величин: по-своему для последовательностей, по-своему для функций и т.д.

5.2. Предел последовательности

Прежде всего необходимо вспомнить определение последовательности: если все значения, принимаемые переменной величиной x , можно занумеровать с помощью всевозможных натуральных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, причем значение с бóльшим номером принимается после значения с мёньшим номером, то говорят, что переменная x пробегает последовательность значений $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; или просто, что имеется последовательность (числовая последовательность).

Для последовательностей содержащееся в общем определении предела переменной высказывание “начиная с некоторого момента в изменении x ” должно означать – “начиная с некоторого номера”, так как члены с бóльшими номерами следуют (по определению последовательности) за членом с мёньшим

номером. Итак, мы получаем следующее определение предела последовательности: число a называется **пределом последовательности** $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, если для произвольного (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех членов последовательности с номером $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Таким образом, указанное неравенство выполняется для номеров $n = N + 1, N + 2, \dots$ и может нарушаться лишь для номеров $n = 1, 2, \dots, N$.

То, что a – предел последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, записывается так:

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ или $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$. В этих записях подчеркнуто, что величина

x_n становится сколь угодно мало отличимой от a , когда номер члена n неограниченно возрастает. Геометрически определение предела означает следующее: для сколь угодно малой ε -окрестности числа a найдется такой номер N , что все члены последовательности с большими, чем N , номерами попадают в эту окрестность; вне окрестности оказывается лишь конечное число начальных членов последовательности (рис.33). Это все или некоторые из членов $x_1, x_2, \dots, x_N$.

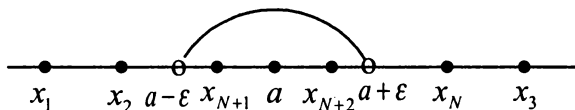


Рис. 33

Число N в нашем определении зависит от ε : $N = N(\varepsilon)$. Как говорилось ранее, определение предела следует понимать в развитии, в динамике, в движении: если мы возьмем другое, меньшее значение для ε , например $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то найдется, вообще говоря, другой номер $N_1 > N$, такой, что неравенство $|x_n - a| < \varepsilon_1$ выполняется при всех $n > N_1$.

Будем записывать определение предела с помощью логических символов (кванторов) – см. §1 п.1.8. Определение предела последовательности с помощью кванторов выглядит так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Пример 1. $x_1 = \frac{2}{1}; x_2 = \frac{3}{2}; \dots; x_n = \frac{n+1}{n}; \dots$

Перепишем иначе общий член этой последовательности

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}. \text{ Довольно ясно, что при достаточно большом } n \text{ величина}$$

$$\frac{1}{n} \text{ становится сколь угодно малой. Так как } |x_n - 1| = \frac{1}{n}, \text{ то есть основание думать,}$$

что число $a = 1$ – предел нашей последовательности. Покажем, что это действительно так. Возьмем какое-либо (произвольное, но нами сейчас зафиксированное) число $\varepsilon > 0$ и пусть N – какое-то натуральное число,

$$\text{большее, чем } \frac{1}{\varepsilon} : N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ (в качестве } N \text{ можно взять } \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1, \text{ где через } [a]$$

принято обозначать наибольшее целое число, не превосходящее a , например, $[3,73] = 3$; тогда $[a] + 1 \geq a \geq [a]$). Тогда для $n > N$ будем иметь

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon. \text{ Следовательно, при } n > N \text{ выполняется неравенство}$$

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ а значит } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Пример 2. $x_1 = \frac{0}{1}; x_2 = \frac{1}{2}; \dots; x_n = \frac{n-1}{n}; \dots$. Так как $x_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$,

то $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$ и точно так же, как в предыдущем примере, доказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

Пример 3. $x_n = \frac{n + (-1)^n}{n}; n = 1, 2, \dots$. Точно так же, как и в примерах 1 и 2

2, доказывається, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n} = 1$.

В прикладі 1 величина $x_n > 1$ при будь-якому n і $x_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$; таким чином, тут послідовність намагається до межі так, щоб кожен її член був більше цієї межі. В прикладі 2, навпаки, кожен член послідовності менше межі цієї послідовності. Нарешті, в прикладі 3 члени послідовності, які мають нечетний номер, менше межі, до якої послідовність намагається, а члени з парними номерами більше межі. Таким чином, змінна величина може по-різному наближатися до межі: залишаючись більше цієї межі, залишаючись менше межі, коливаючись навколо значення межі. Всі ці відмінності не дуже важливі. При вивченні наближення до межі важливим є лише те обставина, що відстань від x_n до a

(тобто $|x_n - a|$) стає якою завгодно малою, коли n достатньо велике.

Не слід думати, що всяка змінна величина, зокрема, всяка послідовність повинна обов'язково наближатися до якогось-то межі.

Приклад 4. $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 1; \dots; x_n = (-1)^n; \dots$

Ця послідовність не має межі. В справі (рис.34), число

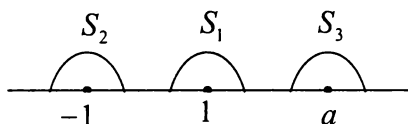


Рис. 34

$a = 1$ не може бути межею цієї послідовності, так як ми можемо побудувати околицю S_1 точки $a = 1$, не містять точки (-1) . Тоді всі члени послідовності з нечетними номерами (а їх нескінченно багато) не потрапляють в S_1 , а якщо б $a = 1$ було

межею цієї послідовності, то в S_1 лежали б всі члени послідовності, крім їх кінцевого числа. Точно такими ж міркуваннями встановлюється, що $a = -1$ не може бути межею цієї послідовності. Нарешті, будь-яке $a \neq 1, -1$ теж не може бути межею. Візьмемо околицю S_3 точки a , не містять точок 1 і (-1) ; в цій околиці немає ні одного члена нашої послідовності.

5.3. Межа функції при $x \rightarrow \infty$

Нехай функція $f(x)$ задана на деякому інтервалі $(b, +\infty)$. Число a називається **межею** $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ таке,

что $\forall x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Сравним это определение с определением предела переменной из п.5.1. Здесь переменная, стремящаяся к пределу, - это функция $f(x)$; $|f(x) - a|$ - это абсолютная величина разности между значениями переменной $f(x)$ и пределом a . Таким образом, $|f(x) - a|$ становится сколь угодно малой для достаточно больших x . Оставшиеся нерасшифрованными в общем определении предела переменной слова "начиная с некоторого момента" в этом случае расшифровываются как "для всех x , больших некоторого N ". Число $N = N(\varepsilon)$ характеризует этот "момент", начиная с которого (при $x > N$) выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Применяемые в этом случае обозначения предела таковы: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ или $f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow +\infty$.

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall x > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (12)$$

Определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$ полностью аналогично определению предела последовательности. Последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ можно рассматривать как функцию, заданную на множестве натуральных чисел: $y_1 = f(1), y_2 = f(2), \dots, y_n = f(n), \dots$

Число a называлось пределом последовательности, когда

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n > N \Rightarrow |f(n) - a| < \varepsilon. \quad (13)$$

Таким образом, вся несущественная разница между определениями предела последовательности (13) и предела функции при $x \rightarrow +\infty$ (12) в том, что у последовательности $\{f(n)\}$ аргумент "прыгает" с одного целого значения n к следующему значению $n+1$, в то время как в случае предела функции (12) аргумент движется вправо, к $+\infty$, по сплошному интервалу. Число N в (13) - целое, в (12) - не обязательно.

Пример. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$

Доказательство этого факта может быть сделано точно так же, как в примере

1 из п.5.2 и даже еще проще, так как теперь не надо заботиться о том, чтобы N было целым числом; достаточно взять $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

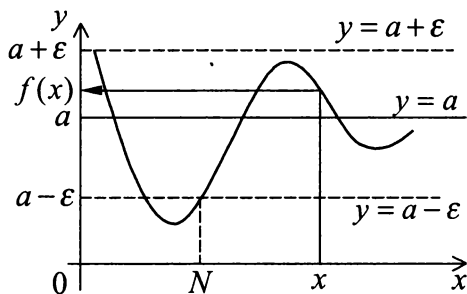


Рис. 35а

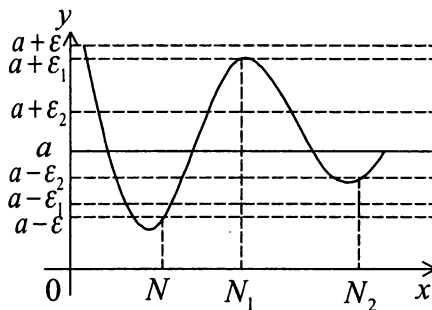


Рис. 35б

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим на оси ординат (где откладываются значения функции при построении ее графика) ε -окрестность точки a ; через концы интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ проведем горизонтальные прямые; уравнения этих прямых: $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$. Между этими прямыми образуется полоса, ее называют ε -полосой вокруг прямой $y = a$, так как последняя служит “средней линией” полосы. По взятому ε нашлось такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех $x > N$ график функции расположен внутри ε -полосы.

Это же можно понимать и так: при $x > N$ значение $f(x)$, если его отложить на оси ординат (или спроектировать значение x через график функции на ось Oy в значение $f(x)$ – как показано на рис.35а), попадает в ε -окрестность точки a .

Как всегда, определение предела надо понимать в динамике процесса изменения переменной. Если мы сузим ε -полосу, взяв ε_1 -полосу, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то, начиная с другого, вообще говоря, большего значения аргумента $N_1 > N$, график войдет в эту более узкую полосу и останется там. Сузим еще более эту полосу, взяв $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, начиная с $N = N_2 > N_1$, график будет лежать в ε_2 -полосе и т.д. (рис.35б).

Приближение линии $y = f(x)$ к прямой $y = a$, состоящее в том, что

модуль разности ординат $|f(x) - a|$ точек с одинаковой абсциссой x на графике и на прямой становится сколь угодно малой величиной, когда x достаточно велико [$|f(x) - a| < \varepsilon$, когда $x > N = N(\varepsilon)$], называется асимптотическим. Вообще некоторая прямая называется *асимптотой* кривой, если *расстояние между точкой графика и прямой стремится к нулю* при бесконечном удалении точки графика от начала координат. Таким образом, наличие предела $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ означает, что прямая $y = a$ является горизонтальной асимптотой для графика функции $f(x)$. График может приближаться к своей асимптоте с одной стороны (сверху или снизу), как на рис.36, 37, или колеблясь около асимптоты, как на рис.38. Важно лишь, что $|f(x) - a|$ становится сколь угодно малым, когда x достаточно велико.

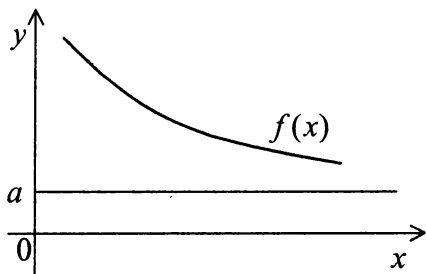


Рис. 36

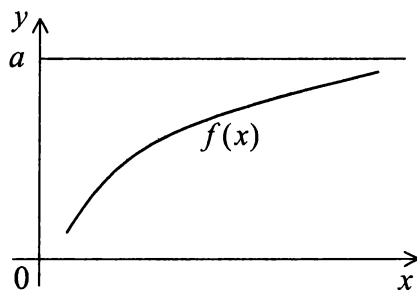


Рис. 37

Аналогично тому, как был определен $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, определяются $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Ограничимся символическими записями:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall x < -N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

(рис.39);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0 \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon .$$

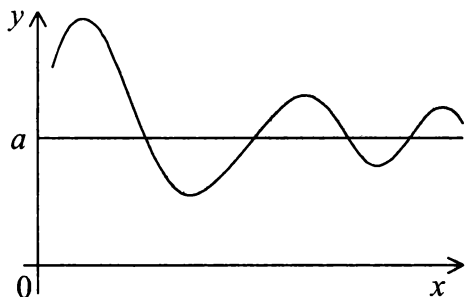


Рис. 38

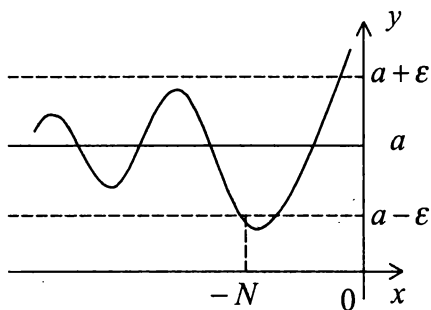


Рис. 39

5.4. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ (предел функции в точке)

Теперь определим предел функции при x , стремящемся к конечному значению x_0 . Будем считать, что функция $f(x)$ определена во всех точках некоторого интервала $(\alpha; \beta)$, содержащего точку x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 .

Нас интересует поведение функции при $x \rightarrow x_0$ (точка x неограниченно приближается к x_0). Если при этом значения функции неограниченно приближаются к некоторому числу a , то говорят, что число a является пределом $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$. В этом случае слова “начиная с некоторого момента...”, содержащиеся в общем определении предела переменной, расшифровываются следующим образом: для всех значений x , достаточно близких к x_0 , или, более точно, для всех точек x из некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 [обычно эту окрестность называют δ -окрестностью (дельта-окрестностью) точки x_0]. Итак, определение предела функции в точке таково: число a называется **пределом функции $f(x)$ в точке x_0** (при $x \rightarrow x_0$), если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существует такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех точек x из δ -окрестности точки x_0 , исключая, быть может, саму точку x_0 (то есть для всех x , для которых выполняется неравенство

$0 < |x - x_0| < \delta$), будет выполняться неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Это же определение запишем с помощью логических значков – кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Еще раз подчеркнем, что $f(x)$ может и не быть определенной в точке x_0 ; с этим связано то, что в определении предела точка x_0 исключена из δ -окрестности ($0 < |x - x_0| < \delta$, то есть $x \neq x_0$). Но даже если значение $f(x_0)$ определено, оно не участвует в определении $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$; для образования этого предела важны только значения функции при значениях аргумента, близких к x_0 , а значение в самой точке x_0 не используется. Поэтому не следует считать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ обязан совпадать с $f(x_0)$ (хотя, конечно, в большинстве встречающихся случаев это так).

Геометрический смысл определения предела функции в точке представлен на рис.40.

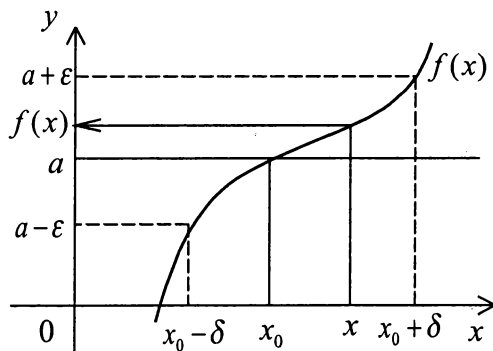


Рис. 40

Для произвольно малой ε -окрестности точки a на оси Oy найдется такая δ -окрестность ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$) точки x_0 на оси Ox , что как только x попадает в эту δ -окрестность точки x_0 , причем $x \neq x_0$, значение функции $f(x)$ (спроектированное через график на ось Oy) попадает в ε -окрестность точки

a . Геометрическую интерпретацию можно описать короче и нагляднее: график функции над (или под) δ -окрестностью точки x_0 идет в ε -полосе вокруг прямой $y = a$ (исключение может составить лишь значение $f(x)$ в самой точке x_0).

5.5. Односторонние пределы функции при $x \rightarrow x_0$

Иногда для исследования поведения функции вблизи некоторых точек нужно знать, к чему стремится $f(x)$, когда $x \rightarrow x_0$, оставаясь правее x_0 (т.е. при $x > x_0$) и когда $x \rightarrow x_0$, оставаясь левее x_0 (то есть при $x < x_0$). Такие пределы функции (если они существуют) называются соответственно правым или левым пределом функции в точке x_0 (или пределами функции справа или слева в точке x_0). Обозначаются эти пределы следующим образом:

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – предел справа; $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – предел

слева. Записи $(x_0 + 0)$ и $(x_0 - 0)$ имеют чисто символическое значение: в первом случае запись $x \rightarrow x_0 + 0$ означает, что $x \rightarrow x_0$, но $x > x_0$ (т.е. x все время чуть больше x_0); во втором случае $x \rightarrow x_0$, но $x < x_0$ (т.е. все время x чуть меньше x_0). Строгое определение левого и правого пределов на “языке $\varepsilon - \delta$ ” дается точно так же, как определение обычного предела в точке x_0 , но надо указывать, что $x > x_0$ (или $x < x_0$). Приведем эти определения в символической записи с использованием кванторов (рис.41):

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon ;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon .$$

Из того, что в точке x_0 существует обычный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, следует (рис.42), что существуют $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ и оба они равны $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

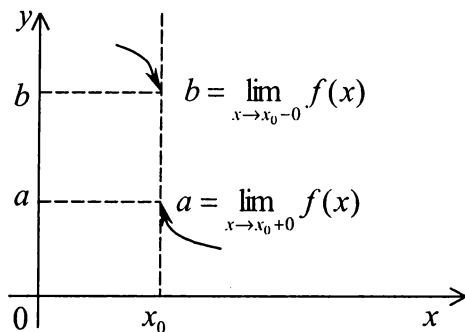


Рис. 41

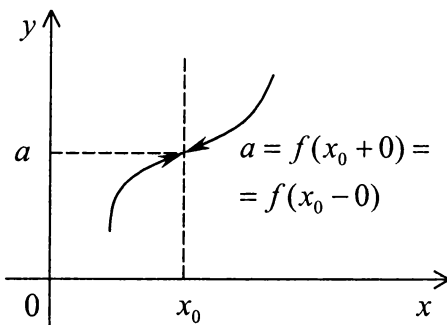


Рис. 42

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (14)$$

И обратно: если в точке x_0 существуют оба односторонних предела, и они равны между собой, т.е. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то существует и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (обычный предел в точке x_0) и выполняется равенство (14). На рис. 41 представлен случай, когда $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$; в этом случае $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует.

§6. Бесконечно малые. Предел и бесконечно малые. Бесконечно большие

6.1. Бесконечно малые

Переменная величина α называется **бесконечно малой**, если она стремится к нулю (число 0 является ее пределом): $\lim \alpha = 0$.

Пример 1. $\alpha_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Тогда при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|\alpha_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

и значит $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Пример 2. (более сложный) Рассмотрим последовательность: $1, q, \dots, q^{n-1}, \dots$ где $q \neq 0$ некоторое число, $|q| < 1$. (Такая последовательность называется геометрической прогрессией). Для $\forall \varepsilon > 0$ при $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} + 1$ (поскольку $|q| < 1$, то $\lg |q| < 0$, а ε берется сколь угодно малым и можно считать, что $\varepsilon < 1$ и тогда $\lg \varepsilon < 0$, а дробь $\lg \varepsilon / \lg |q|$ – положительна) будет $|q|^{n-1} < \varepsilon$, и следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0$.

То, что какая-то переменная величина α является бесконечно малой, геометрически истолковывается следующим образом: для любой ε -окрестности $(-\varepsilon; +\varepsilon)$ числа 0 найдется такой момент в изменении α , начиная с которого все значения α попадают в эту окрестность. Ясно, что это специальный случай общего геометрического толкования понятия предела (когда предел равен нулю).

Следует четко понять, что никакое отличное от нуля постоянное число, как бы ни было оно мало по абсолютной величине, не может быть бесконечно малой величиной. Из постоянных величин (напомним, что в математическом анализе постоянную величину рассматривают как переменную, принимающую все время одно и то же значение) лишь нуль является бесконечно малой. Если же исключить этот случай, то бесконечно малая – это всегда *переменная* величина, процесс изменения которой обусловлен данным выше определением.

6.2. Основные свойства бесконечно малых $\S 6.2$.

1. Сумма или разность бесконечно малых является бесконечно малой.

Пусть α и β – две бесконечно малые величины, обозначим $\gamma = \alpha \pm \beta$. Требуется установить, что γ – бесконечно малая величина. Чтобы провести рассуждения более четко, будем считать, что α и β – бесконечно малые последовательности: α пробегает последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$; β пробегает последовательность $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$. Тогда γ пробегает последовательность $\gamma_1 = \alpha_1 \pm \beta_1; \gamma_2 = \alpha_2 \pm \beta_2; \dots; \gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n$. Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$. Так как последовательность α бесконечно малая, то найдется

номер N_1 такой, что для всех членов с номерами $n > N_1$ будет выполняться

неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (здесь удобно в качестве указателя малости членов α_n

взять именно $\frac{\varepsilon}{2}$, а не ε). Последовательность β также бесконечно малая,

значит, найдется номер N_2 такой, что для всех ее членов с номерами $n > N_2$

выполняется неравенство $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем теперь номер N , равный

наибольшему из номеров N_1 и N_2 [записывается это так: $N = \max(N_1; N_2)$].

Тогда для всех членов обеих последовательностей (α и β) с номерами $n > N$

выполняются одновременно оба неравенства $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Воспользуемся теперь неравенствами треугольника $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ для любых двух действительных чисел. Для всех членов последовательности γ с номерами

$n > N$ имеем: $|\gamma_n| = |\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Т.е. для произвольного

$\varepsilon > 0$ нашелся номер N такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|\gamma_n| < \varepsilon$; следовательно, последовательность γ бесконечно малая.

Доказанное свойство распространяется на сумму любого конечного числа бесконечно малых: если $\gamma = \alpha + \beta + \dots + \delta$, где $\alpha, \beta, \dots, \delta$ – бесконечно малые переменные, то γ – бесконечно малая величина.

✓ 2. Произведение бесконечно малой величины α на ограниченную переменную x является бесконечно малой (определение ограниченной переменной см. в §3 п.3.1).

✓ 3) Произведение двух бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной.

Пусть α и β – б.м., а $\gamma = \alpha \cdot \beta$. Ясно, что γ не только б.м. вместе с α и β , но она в некотором смысле “гораздо меньше”, чем α и чем β : γ составляет

бесконечно малую часть от α , так как $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ – б.м., и бесконечно малую часть

от β , так как $\frac{\gamma}{\beta} = \alpha$ – б.м. Мы не будем давать формального доказательства свойств 2 и 3.

6.3. Связь предела и бесконечно малых

1. *Переменная величина x , стремящаяся к пределу a , может быть представлена как сумма предела и бесконечно малой:*

если $a = \lim x$, то $x = a + \alpha$, α – б.м.

2. (обратное утверждение). *Если $x = a + \alpha$, где a – постоянное число, а α – б.м., то $a = \lim x$.*

Доказательство вытекает из того, что согласно определениям предела и бесконечно малой разность $\alpha = x - a$ между переменной и ее пределом есть б.м. величина.

6.4. Основные свойства пределов. Правила предельного перехода

1. *Если переменная величина x имеет предел, то только один.*

Проведем доказательство этого свойства для случая, когда x является

последовательностью $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Допустим, что два числа a и b , $a \neq b$, служат пределами этой последовательности (рис.43).

Мы можем окружить a и b окрестностями S_1 и S_2 соответственно и выбрать S_1 и S_2 непёreseкающимися.

Тогда, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то существует такой номер N_1 , что все члены

последовательности с номерами $n > N_1$ попадают в S_1 ; точно так же, так как

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то существует N_2 такой, что все члены с $n > N_2$ попадают в S_2 .

Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$; тогда при $n > N$ все члены последовательности

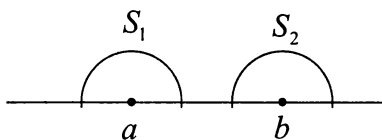


Рис. 43

должны одновременно находиться и в S_1 и в S_2 , что невозможно. Мы пришли к противоречию, значит, наше допущение было неверным, и переменная не может иметь два различных предела.

2. Если переменная величина x имеет предел, то, начиная с некоторого момента, она является ограниченной. Это значит, что существует число $M > 0$ такое, что неравенство $|x| < M$ выполняется, начиная с некоторого момента в изменении x .

Проведем доказательство этого свойства для случая, когда в качестве переменной величины берется последовательность. В этом случае наше свойство звучит так: последовательность, имеющая предел, является ограниченной. Итак, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N$ такое, что $\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < 1$.

Таким образом, $\forall n > N$ имеем: $|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < |a| + 1$.

Положим $M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1)$. Тогда $|x_n| \leq M$ при любом n .

Действительно, при $n > N$ $|x_n| < |a| + 1 \leq M$; если $1 \leq n \leq N$, то опять таки

$|x_n| \leq M$ и наше утверждение доказано. Отметим, что обратное утверждение

не имеет места: рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$; $n = 1, 2, \dots$. В примере 4 п.5.2 §5 мы доказали, что такая последовательность предела не имеет.

В то же время $|x_n| = 1 \forall n$, значит, эта последовательность ограничена.

3. Предел постоянной величины $x = C$ есть само число C . Свойство это очевидно. Переменная величина x сейчас принимает единственное значение C , поэтому $|x - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $C = \lim x = \lim C$.

4. Основные правила предельного перехода.

Предел суммы, разности, произведения переменных величин равен, соответственно сумме, разности, произведению пределов этих величин. Предел частного двух переменных величин равен частному от деления пределов этих величин, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y, \quad \lim(xy) = \lim x \cdot \lim y,$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0.$$

Докажем первое из этих утверждений. Пусть $\lim x = a$, $\lim y = b$. Тогда $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, где α и β – б.м. Тогда $x + y = (a + \alpha) + (b + \beta)$. Поскольку $\alpha + \beta$ – б.м., а сумма $a + b$ – постоянное число, то $a + b = \lim(x + y)$.

Доказательство остальных утверждений вполне аналогично.

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.* Пусть C – постоянная величина, а x – переменная, стремящаяся к какому-то пределу. Тогда

$$\lim Cx = \lim C \cdot \lim x = C \cdot \lim x.$$

(Поскольку предел постоянной величины есть само число C).

Заметим, что правило для суммы и произведения верно и в случае большего, чем два, количества участвующих величин:

$$\lim(x + y + \dots + z) = \lim x + \lim y + \dots + \lim z;$$

$$\lim(x \cdot y \cdot \dots \cdot z) = \lim x \cdot \lim y \cdot \dots \cdot \lim z.$$

Следствие 2. *Предел степени равен степени от предела.*

$$\lim(x^n) = \lim(\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_\substack{\uparrow \\ n \text{ множителей}}) = \lim x \cdot \lim x \cdot \dots \cdot \lim x = (\lim x)^n.$$

Мы установили последний факт, считая показатель n целым положительным числом. Однако правило верно при любом показателе $n \geq 0$.

Примеры:

1. $\lim x = 1$. Найти $\lim(x + 3)$:

$$\lim(x + 3) = \lim x + \lim 3 = 1 + 3 = 4. \text{ Мы применили свойства 3 и 4.}$$

2. $\lim x = -1$. Найти $\lim(x^2 + x + 1)$.

$$\begin{aligned} \lim(x^2 + x + 1) &= \lim x^2 + \lim x + \lim 1 = (\lim x)^2 + \lim x + 1 = \\ &= (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

Мы применили свойства 3, 4 и следствие 2.

3. $\lim x = 3$. Найти $\lim \frac{x^2 - 2}{x + 8}$.

$$\lim \frac{x^2 - 2}{x + 8} = \frac{\lim(x^2 - 2)}{\lim(x + 8)} = \frac{\lim x^2 - \lim 2}{\lim x + \lim 8} = \frac{(\lim x)^2 - 2}{\lim x + 8} = \frac{3^2 - 2}{3 + 8} = \frac{7}{11}.$$

Использованы свойства 3, 4 и следствие 2.

6.5. Бесконечно большие величины

Переменная величина x называется **бесконечно большой**, если обратная к

ней величина $\frac{1}{x}$ является бесконечно малой. Отсюда сразу же следует: если α –

бесконечно малая величина, $\frac{1}{\alpha}$ – бесконечно большая (если только среди

значений, принимаемых переменной α , нет значения нуля: $\alpha \rightarrow 0$, но $\alpha \neq 0$,

так как иначе $\frac{1}{\alpha}$ не имело бы смысла). Таким образом, бесконечно большая

переменная величина – это такая переменная, все значения которой по абсолютной величине, начиная с некоторого момента в изменении этой переменной, становятся и остаются больше любого наперед заданного (сколько угодно большого) положительного числа.

Если x – бесконечно большая величина, то пишут $x \rightarrow \infty$ или $\lim x = \infty$ (иногда сокращенно будем писать x – б.б.). Конечно, здесь знак $\lim$ употребляется в другом смысле по сравнению с его использованием в определении обычного (мы будем говорить – конечного) предела переменной величины. Не следует пытаться, как иногда делают начинающие изучение теории пределов, определить ситуацию $\lim x = \infty$ с помощью неравенства типа $|x - \infty| < \varepsilon$, так как символ ∞ не есть какое-то число и использовать его в

разности $(x - \infty)$ бессмысленно. Про *бесконечно большую величину* x говорят также, что она *стремится к бесконечности* (символ $x \rightarrow \infty$), и опять таки здесь термин “стремится” использован в другом смысле по сравнению с ситуацией, когда x стремится к конечному пределу. В дальнейшем, говоря о том, что у некоторой переменной величины существует предел, мы всегда будем подразумевать обычный, то есть конечный предел (см. п.5.1), если только специально не будет оговорено противное.

Если у бесконечно большой величины x все ее значения, начиная с некоторого, положительны, то говорят, что x – положительная бесконечно большая величина, и пишут $x \rightarrow +\infty$ или $\lim x = +\infty$. Аналогичным образом определяется отрицательная бесконечно большая величина (запись $x \rightarrow -\infty$; $\lim x = -\infty$).

Процесс изменения бесконечно большой переменной величины x

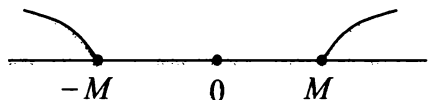


Рис. 44

характеризуется следующим образом (рис.44): для произвольно большого положительного числа M , начиная с некоторого момента в изменении x , должно выполняться неравенство $|x| > M$. Геометрически это означает

следующее: каким бы большим не был взят интервал $(-M; +M)$, начиная с некоторого момента в изменении x , все ее значения лежат вне этого интервала.

Для случая бесконечно больших последовательностей $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ на языке кванторов определение записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N = N(M) : n > N |x_n| > M.$$

Если в определении обычного предела под $\forall \varepsilon$ надо понимать “сколь угодно малое” ε , то в определении бесконечно больших под $\forall M$ следует понимать “сколь угодно большое” M .

Пример 1. Переменная x , пробегающая последовательность значений

$x_1 = 1; x_2 = 2; \dots; x_n = n; \dots$, бесконечно большая. Действительно, $\frac{1}{x}$ пробегает

последовательность значений $1; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$, а эта последовательность бесконечно малая (пример 2, п.6.1). Именно тем, что последовательность $1; 2; \dots; n; \dots$ является бесконечно большой, оправдывается запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

для предела последовательности и запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ для бесконечно большой последовательности.

Пример 2. Последовательность $x_n = Q^{n-1}; n = 1, 2, \dots$, где Q – некоторое число, причем $|Q| > 1$ – бесконечно большая. Действительно,

последовательность обратных величин $\alpha_n = \frac{1}{Q^{n-1}} = q^{n-1}; n = 1, 2, \dots$, где

$q = \frac{1}{Q}; |q| < 1$ будет бесконечно малой (пример 2, п.6.1).

Точно так же, как бесконечно малой величиной не может быть никакое постоянное число (кроме нуля), как бы мало оно ни было, так и бесконечно большой величиной не может являться никакое постоянное число, каким бы большим оно ни было. Бесконечно большая величина – это всегда величина переменная, изменение которой удовлетворяет данному выше определению.

6.6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определения бесконечно малых и бесконечно больших функций при $x \rightarrow x_0$ и $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$) даются на основе общих определений бесконечно малых и бесконечно больших переменных величин, т.е. функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ (или при $x \rightarrow \infty$), если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (или $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$).

Можно более подробно расшифровать эти определения на “языке $\varepsilon - \delta$ ”, используя уже известные нам определения предела функции в точке и предела функции при $x \rightarrow \infty$ (в этих определениях надо положить $a = 0$). Соответствующие геометрические иллюстрации даны на рис.45 и 46.

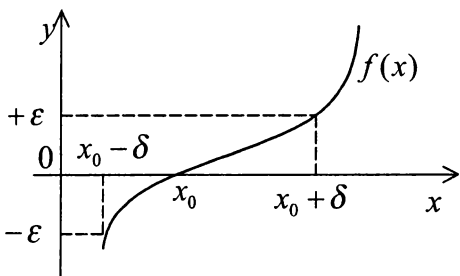


Рис. 45

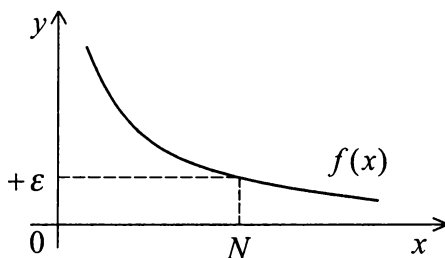


Рис. 46

Определение бесконечно большой функции при $x \rightarrow \infty$ дается аналогично определению бесконечно большой последовательности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N = N(M) > 0 \forall x: |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M$$

(рис.47).

Согласно определению функция $f(x)$ называется бесконечно большой

при $x \rightarrow x_0$, если $\frac{1}{f(x)}$ является б.м. при $x \rightarrow x_0$; обозначается это так:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. Можно подробно расшифровать эту запись:

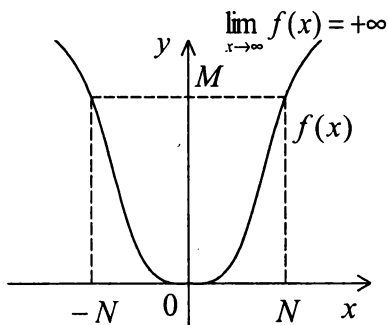


Рис. 47

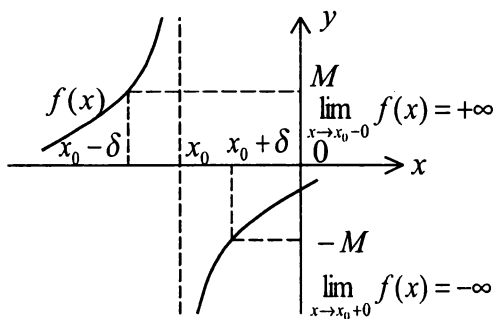


Рис. 48

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Если $f(x)$ является бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, то, как видно из рис.48, график функции при удалении от начала координат неограниченно приближается к прямой $x = x_0$ (расстояние между прямой $x = x_0$ и точкой графика стремится к нулю), т.е. прямая $x = x_0$ является асимптотой (вертикальной) функции $f(x)$. Речь может идти также о бесконечно малых и бесконечно больших функциях при $x \rightarrow x_0 + 0$ (справа) и при $x \rightarrow x_0 - 0$ (слева). Например, на рис.48 $f(x)$ является отрицательной бесконечно большой справа и положительной бесконечно большой слева [$f(x_0 + 0) = -\infty$; $f(x_0 - 0) = +\infty$].

6.7. Два замечательных предела

В математике важную роль играют два специальных предела, которые ввиду их важности названы “замечательными”:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - (\text{первый замечательный предел}); \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - (\text{второй замечательный предел}). \quad (16)$$

В пределе (16) $x \rightarrow \infty$ любым образом, знак x здесь не важен.

Число $e \approx 2,71828\dots$, как установлено, является иррациональным и играет

в математике такую же замечательную роль, как, скажем, число π (тоже, кстати, иррациональное). Предел (16) значительно труднее осмыслить, чем предел (15).

Ведь “очевидное” рассуждение: раз $x \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{x}$ – б.м., значит $1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$, а

единица в любой степени – единица и, следовательно, предел (16) равен единице

– грубо ошибочно. Да, $1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$, но одновременно с этим меняется показатель

степени $x \rightarrow \infty$ и получается в результате вовсе не единица, а число $e \neq 1$.

Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются знаком $\ln$.

Второй замечательный предел можно записать и так:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (\text{положим } \alpha = \frac{1}{x}). \quad (17)$$

Мы не будем останавливаться на выводе (15) и (16) – см. [2] гл. II §§6–8, [1] гл. IV §4, но покажем решение нескольких примеров с их участием. Сначала примеры, основанные на пределе (15).

Пример 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 5.$ (Здесь введена

новая переменная $y = 5x; y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$).

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}.$

Здесь использована теорема о пределе частного: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$

Пример 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$ Введем новую переменную $y = \arcsin x$, тогда

$\sin y = x$. Так как $x \rightarrow 0$, то и $y = \sin x \rightarrow 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Пример 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$ (с помощью введения новой переменной

$y = \arctg x$ доказать справедливость этого равенства).

Теперь несколько примеров с использованием пределов (16) и (17).

Пример 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Положим $x = -y$; при $x \rightarrow \infty$; $y \rightarrow \infty$ (знак бесконечно больших в (16) не важен!).

Получаем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y} = \frac{1}{e}.$$

Пример 2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{5}{x}}$. Положим $y = 3x$; $y \rightarrow 0$. Получаем:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{15}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^{15} = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^{15} = e^{15}.$$

6.8. Раскрытие неопределенностей

Иногда правила предельного перехода непосредственно неприменимы. Так

будет, например, при отыскании $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда $f(x) \rightarrow 0$ и $\varphi(x) \rightarrow 0$ (таков,

в частности, первый замечательный предел) или одновременно $f(x) \rightarrow \infty$ и $\varphi(x) \rightarrow \infty$. В этом случае надо проделать над дробью некоторые преобразования. Чтобы обозначить такие ситуации, говорят, что имеем дело с

“неопределенностью” $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ (условная запись ситуации), а вычисление предела называют “раскрытием неопределенности”.

Пример 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Пример 2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4} \quad (\text{чтобы убрать корни,}$$

умножим числитель и знаменатель на величину $\sqrt{x+4} + 2$ "сопряженную числителю").

$$\text{Пример 3. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x + \frac{3}{x^2}} = 0 \quad (\text{числитель } 1 + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1, \text{ т.к.}$$

$\frac{1}{x^2}$ – б.м.), знаменатель $x + \frac{3}{x^2} \rightarrow \infty$, т.к. x – б.б., $\frac{3}{x^2}$ – б.м. и вся дробь будет б.м.

$$\text{Пример 4. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ т.к. } \arcsin 0 = 0 \right). \quad \text{Положим}$$

$y = \arcsin 3x; y \rightarrow 0$. Тогда $3x = \sin y$, $x = \frac{1}{3} \sin y$ и получаем:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{1}{3} \sin y} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 3.$$

"Неопределенности" могут возникнуть и при вычислении предела произведения $\lim f(x)\varphi(x)$, если $f(x) \rightarrow 0$, $\varphi(x) \rightarrow \infty$. Условно это

записывается $(0 \cdot \infty)$. Такую неопределенность легко преобразовать к $\frac{0}{0}$ или

$\frac{\infty}{\infty}$.

Могут возникать также неопределенности вида $(\infty - \infty)$: здесь ищется

$\lim (f(x) - \varphi(x))$, когда и $f(x)$ и $\varphi(x)$ – б.б. В этом случае выражение также надо преобразовать.

Пример.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^3-1} \right) (\infty - \infty) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x+1-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) = \infty \quad (\text{т.к. числитель стремится к } 2, \text{ а в} \\ &\text{знаменателе - б.м.}) \end{aligned}$$

Неопределенности типа 1^∞ ($\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{\varphi(x)}, f(x) \rightarrow 1, \varphi(x) \rightarrow \infty$) раскрываются с помощью второго замечательного предела.

Пример. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x}$; т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 1$, то это

неопределенность типа 1^∞ . Продолжаем, выделяя в скобках единицу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3+5}{x-3} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-3} \right)^{3x} (1^\infty). \text{ Положим } y = \frac{5}{x-3}, y \rightarrow 0,$$

$$x = \frac{5}{y} + 3. \text{ Тогда}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{3\left(\frac{5}{y}+3\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{15} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^9 = e^{15} \cdot 1 = e^{15}.$$

6.9. Сравнение бесконечно малых

Пусть α и β бесконечно малые (последовательности или функции). Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = C, C \neq 0, C \neq \infty,$$

то говорят, что α и β являются б.м. одного порядка.

Если же

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0,$$

то α имеет высший порядок малости по отношению к β (или α – б.м. более высокого порядка, чем β). В этом случае б.м. α составляет б.м. часть от б.м. β . Если окажется, что

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty, \text{ то } \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0,$$

β – высшего порядка малости.

При сравнении переменных величин (не обязательно бесконечно малых) употребительна следующая символика: если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то пишут $\alpha = o(\beta)$

(читается “о малое”). Так, всякая б.м. $\alpha = o(1)$, поскольку $\lim \frac{\alpha}{1} = 0$. Если α и

β две б.м. и α – высшего порядка относительно β , то $\alpha = o(\beta)$. Если

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = C (\neq 0 \neq \infty)$, то пишут $\alpha = O(\beta)$ (“О большое”) – величины одного

порядка.

Пример 1. Сравним при $x \rightarrow 0$ две бесконечно малые функции $\alpha = \sin x$ и $\beta = \sqrt{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot 3\sqrt{x}}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Здесь мы сначала умножили числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{x}$, а затем применили теорему о пределе произведения и первый замечательный предел. В результате мы установили, что при $x \rightarrow 0$ $\sin 3x$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с $\sqrt{x}$.

Пример 2. $\alpha = \sin x$; $\beta = \operatorname{tg} 3x$ – б.м. при $x \rightarrow 0$; сравним их:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{tg 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{tg 3x}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{tg 3x}{x}} = \frac{1}{3} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 3x}{x}} = \frac{1}{3},$$

то есть при $x \rightarrow 0$ $\sin x$ и $tg 3x$ имеют одинаковый порядок малости.

Пример 3. $\alpha = \frac{1}{x}$, $\beta = \frac{1}{x^2}$ – б.м. при $x \rightarrow \infty$, сравним их:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty; \text{ таким образом, при } x \rightarrow \infty \beta = \frac{1}{x^2} \text{ имеет}$$

более высокий порядок малости по сравнению с $\alpha = \frac{1}{x}$.

6.10. Эквивалентные бесконечно малые

Две бесконечно малые α и β называются эквивалентными, если

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Таким образом, эквивалентные бесконечно малые имеют одинаковый порядок малости. Однако не всякие две бесконечно малые одного порядка будут эквивалентными. В предыдущем примере 2 α и β одного порядка, но не эквивалентны. Если α и β эквивалентны, то это записывается так: $\alpha \sim \beta$.

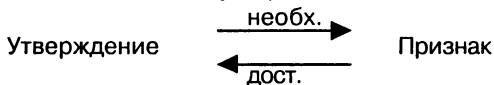
Пример. При $x \rightarrow 0$ $\alpha = \sin x$ и $\beta = tg x$ – эквивалентны:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{tg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

6.11. Свойства эквивалентных бесконечно малых

1. Для того чтобы две б.м. α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой более высокого порядка, чем каждая из них.

Мы здесь впервые встречаемся с подобной формулировкой, поэтому вкратце поясним, какие признаки называются необходимыми, а какие достаточными. Пусть имеется некоторое утверждение и некоторый признак, с помощью которого мы собираемся проверить справедливость этого утверждения. Если при том, что имеет место утверждение, выполняется и признак, то такой признак называется необходимым для этого утверждения. Если же при выполнении признака имеет место и утверждение, то такой признак называется достаточным для этого утверждения:



2) Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если любую из них заменить ей эквивалентной

В самом деле, пусть α и β – две бесконечно малые и $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$:
Тогда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim \frac{\beta}{\beta_1} \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1 \cdot 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Это свойство очень удобно использовать в практике отыскания пределов

(при раскрытии неопределенности типа $\left[\frac{0}{0} \right]$), так как согласно этому свойству

при отыскании предела частного бесконечно малые, стоящие в числителе и знаменателе, можно заменить им эквивалентными. Для этих целей выпишем таблицу эквивалентных б.м., частично фактически нами ранее уже полученную.

6.12. Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $\sin x \sim x$ | 6. $\log_a(x+1) \sim \frac{x'}{\ln a}$ |
| 2. $\operatorname{tg} x \sim x$ | 7. $\ln(1+x) \sim x$ |
| 3. $\arcsin x \sim x$ | 8. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ |
| 4. $\arctg x \sim x$ | 9. $e^x - 1 \sim x$ |

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (7)$$

где c – какая-то точка между x и x_0 . (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$). Формула (7) называется формулой Тейлора и играет в анализе исключительную роль. Дело в том, что произвольная функция $f(x)$ заменяется многочленом степени n , расположенным по степеням $x - x_0$:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (8)$$

Правда, с некоторой поправкой

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (9)$$

Для анализа многочлен является наиболее простой и удобной функцией. Многочлен (8) называют многочленом Тейлора для $f(x)$, а поправочный член (9) – остаточным членом. Он устроен так же, как члены многочлена, однако производная $f^{(n+1)}$ определена не в точке x_0 , а в некоторой промежуточной точке c . Точное расположение c неизвестно, но это часто не мешает оценивать величину остаточного члена и, таким образом, точность замены

$$f(x) \approx T_n(x). \quad (10)$$

Представим себе, что $x - x_0$ б.м. ($x \rightarrow x_0$). Тогда каждый следующий член в $T_n(x)$ имеет порядок малости выше предыдущего. Отбрасывая, как в (10), остаточный член, мы совершаем ошибку, являющуюся б.м. $(n+1)$ порядка. Поэтому, чем больше n , тем замена (10) точнее. При $n=0$ будет $n+1=1$ и мы получаем

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0). \quad (11)$$

Это знакомая нам формула Лагранжа (2) из §1, правда, в несколько иных обозначениях. Чтобы получилось (2), надо обозначить x_0 через a и x через b . Тогда получим

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a),$$

что и совпадает с (2). Выведем формулу (7), ограничившись случаем $n=2$:

$$(-\infty, 0)y'' < 0 \quad \text{вогнутость}$$

Точек перегиба нет.

$$(0, +\infty)y'' > 0 \quad \text{выпуклость.}$$

Схематическое изображение выпуклости и вогнутости (рис.87).

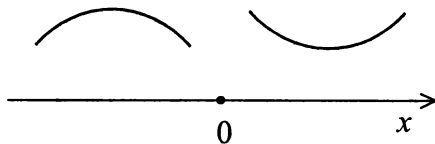


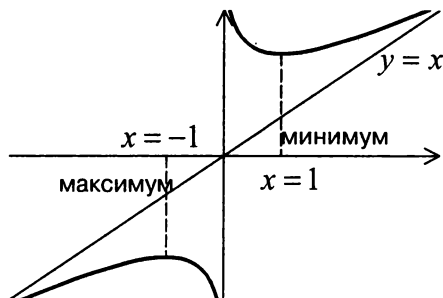
Рис. 87

$$\text{IV. } k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x + \frac{1}{x} - x\right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Наклонная асимптота $y = x$.

V. График.



§9. Формула Тейлора

9.1. Доказательство формулы Тейлора

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и некоторой ее окрестности производные до $(n+1)$ порядка включительно, то в этой окрестности точки x_0 ее можно представить в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

I. Область определения: интервалы $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ (все числа, кроме нуля).
 Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Точка разрыва $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = +\infty$. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота. При $x = 0$ функция не определена и поэтому с осью Oy график не пересекается. Пересечение с осью Ox : $y = 0, x + \frac{1}{x} = 0, \frac{x^2 + 1}{x} = 0, x^2 + 1 = 0$?
 С осью Ox график также не пересекается. При $x < 0$ $y < 0$. При $x > 0$ $y > 0$.

$$\text{II. } y' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Критические точки: } y' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Интервал $(-\infty, -1) y' > 0$ возрастание
 $x = -1$ максимум
 $(-1, 0) y' < 0$ убывание
 $(0, 1) y' < 0$ убывание
 $x = 1$ минимум
 $(1, +\infty) y' > 0$ возрастание

Схематическое изображение возрастания и убывания (рис.86).

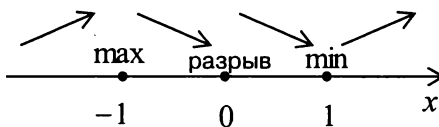


Рис. 86

III. $y'' = \frac{2}{x^3}$. Критическая точка $x = 0$, но там функция не определена, там разрыв.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0.$

Встречаются также неопределенности видов $1^\infty, 0^0, \infty^0$ при вычислении $\lim [f(x)]^{\varphi(x)}$. При логарифмировании возникнет неопределенность типа $0 \cdot \infty$ и следует “раскрыть” ее, а затем вернуться к исходному пределу и использовать непрерывность показательной функции.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} (0^0)$. Положим $y = x^{\sin x}$. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y (0 \cdot \infty) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} \left(\frac{0}{0} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x + x \cdot (-\sin x)} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\ln y \rightarrow 0$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln y} = e^0 = 1.$

§8. Общая схема исследования функции. Построение графика

I. Элементарное исследование: область определения, симметрия графика: четность, нечетность, точки разрыва и интервалы непрерывности, вертикальные асимптоты (проверка в точках разрыва), точки пересечения графика с осями координат, знаки значений функции на различных интервалах.

II. Исследование на возрастание, убывание и точки экстремума с помощью y' . Условные обозначения возрастания и убывания стрелками $\nearrow$ $\searrow$.

III. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба – исследование с помощью y'' . Условные обозначения выпуклости и вогнутости дугами $\cup$ $\cap$.

IV. Поведение на бесконечности, наклонные (в частности, горизонтальные) асимптоты.

V. Построение графика, основываясь на всех полученных сведениях (в частности, с учетом схем).

Пример. $y = x + \frac{1}{x}$.

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \quad (6)$$

Доказательство проведем для случая $\frac{0}{0}$ и $x \rightarrow x_0$. Теперь $\varphi(x) \rightarrow 0$ при

$x \rightarrow x_0$. Доопределим $\varphi(x)$ (она могла не быть там определенной) в точке x_0 , положив $\varphi(x_0) = 0$. Тогда в точке x_0 эта функция непрерывна, а в других точках она непрерывна, т.к. имеет производную $\varphi'(x)$. Точно так же поступим с $\psi(x)$.

Имеем: считая для определенности, что $x > x_0$,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}, x_0 < c < x$$

– по теореме Коши. Значит

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = (\text{другое обозначение}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Примеры.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}. \text{ Неопределенность } \frac{0}{0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos 7x}{3 \cos 3x} = \frac{7}{3}, \text{ т.к. } \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2 + 1} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x (\ln 2)^2}{2} = \infty.$$

7.2. Другие неопределенности

Находя $\lim [\varphi(x) \cdot \psi(x)]$, можно встретить неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Она мгновенно заменяется на $\frac{0}{0}$ либо $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \lim \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

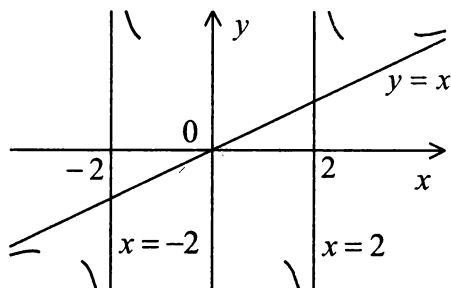


Рис. 85

§7. Правило Лопиталя

Часто приходится иметь дело с нахождением $\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, когда числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к ∞ . Такие пределы условно

обозначаются как $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а их вычисление называют “раскрытие

неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ ” (см. гл. I §5 п.5.8). Пределы подобного типа

возникают, в частности, в задаче об угловом коэффициенте k для асимптоты. Существует один общий прием, который часто ведет к цели для таких пределов.

7.1. Неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя. Отыскивается $\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$,

когда одновременно $\begin{cases} \varphi(x) \rightarrow 0 \\ \psi(x) \rightarrow 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \varphi(x) \rightarrow \infty \\ \psi(x) \rightarrow \infty \end{cases} : \left(\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty} \right)$. Если существует

предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то существует и предел отношения функций и эти пределы равны:

(с найденным уже k !) конечного предела нет. Тогда асимптоты нет. Тем более ее нет, если нет конечного предела в формуле для k .

Пример. Найти асимптоты линии $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4}$.

Знаменатель дроби обращается в нуль в точках $x^2 - 4 = 0, x = \pm 2$.

Проверим, будут ли вертикальные прямые $x = 2$ и $x = -2$ асимптотами.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} y = +\infty.$$

Прямые $x = 2$ и $x = -2$ – вертикальные асимптоты.

Ищем наклонные:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + 2 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0. \text{ Наклонная асимптота } y = x. \text{ Здесь при } x \rightarrow +\infty \text{ и}$$

$-\infty$ будет один и тот же предел; однако при $x < 0$ $y - x < 0$, т.к. при $x \rightarrow -\infty$

числитель дроби $\frac{2 + 4x}{x^2 - 4}$ отрицателен, а знаменатель положителен. Точно так

же при $x \rightarrow +\infty$ $y - x > 0$. Стало быть, при $x \rightarrow -\infty$ кривая ниже асимптоты, а при $x \rightarrow +\infty$ выше. На рис.85 схематически изображены приближения кривой к ее асимптотам.

Вид “веточек” кривой вблизи ее асимптот помогает вырисовыванию полного графика.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Пример. $y = \frac{1}{x-2}$. Точка разрыва $x = 2$. $\lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} y = +\infty$.

Прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота.

Упражнение. Нарисуйте график этой функции вблизи асимптоты.

6.3. Наклонные и, в частности, горизонтальные асимптоты

Пусть прямая L есть наклонная асимптота графика $y = f(x)$. Теперь точка $M(x, f(x))$ может уходить на неограниченное расстояние от начала координат, лишь когда $x \rightarrow \infty$ (надо, как правило, отдельно разбирать случаи $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$). Уравнение кривой $y = f(x)$, уравнение асимптоты

$$y_a = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент, а b – начальная ордината. Через y_a обозначена ордината точки асимптоты, чтобы ее не спутать с ординатой $y = f(x)$ на кривой. Ясно (см. средний пример на рис.84), что $\delta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то же самое как $y - y_a \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Имеем

$$f(x) - (kx + b) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty \quad (*)$$

$$\frac{f(x)}{x} - k + \frac{b}{x} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty \text{ – тем более (разделили на } x \rightarrow \infty).$$

При $x \rightarrow \infty$ $\frac{b}{x} \rightarrow 0$. Получается:

$$\frac{f(x)}{x} = k + \text{б.м.} \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

Зная k из (*), имеем: $f(x) - kx - b = \text{б.м.}$, $f(x) - kx = b + \text{б.м.}$, т.е.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]. \quad (5)$$

Повторим еще раз: надо различать случаи $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ и добавим: может случиться, что в формуле для k предел существует, а в формуле для b

§6. Асимптоты

6.1. Определение

Прямая L называется **асимптотой кривой**, если расстояние от текущей точки M на кривой до прямой L становится бесконечно малой величиной, когда точка M неограниченно удаляется от начала координат (т.е. когда расстояние от M до начала координат $\rightarrow \infty$).

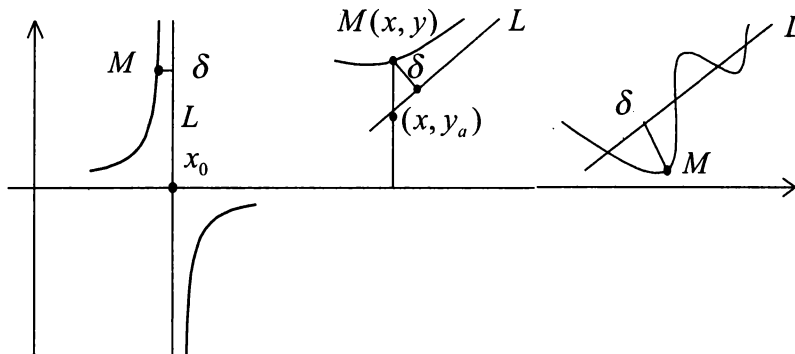


Рис. 84

На рис.84 представлено несколько типов асимптот: вертикальная и наклонные. Расположение кривой относительно асимптоты может быть различным: на рис.84 к вертикальной асимптоте L кривая подходит с разных сторон, в другом примере кривая лежит выше наклонной асимптоты, в третьем навивается на асимптоту.

Примеры.

1. $y = 2^x$ – горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ – горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

3. $y = \frac{1}{x}$. Вертикальная асимптота $x = 0$.

Упражнение. Нарисуйте эти графики.

6.2. Вертикальные асимптоты

Вертикальные асимптоты могут образовываться только в точках разрыва функции $y = f(x)$. Найдя точку разрыва x_0 , надо вычислить

5.4. Достаточный признак точки перегиба

Достаточным признаком точки перегиба является смена знака $f''(x)$ при переходе через точку x_0 .

Исследование на выпуклость, вогнутость и точки перегиба очень похоже на то, как велось исследование на возрастание, убывание и точки экстремума, но теперь действует не $f'(x)$, а $f''(x)$: находим критические точки для $f''(x)$, т.е. точки, где она равна нулю или не существует. Область определения функции этими точками разобьется на интервалы. На каждом из этих интервалов определяем знак $f''(x)$ и делаем заключение о выпуклости или вогнутости на нем. Точки, где на самом деле происходит смена выпуклости и вогнутости – абсциссы точек перегиба. (Не все критические для $f''(x)$ точки обязаны служить абсциссами точек перегиба). Удобно символически показывать участки выпуклости и вогнутости графика: $\cup$ выпуклость, $\cap$ вогнутость (рис.83)

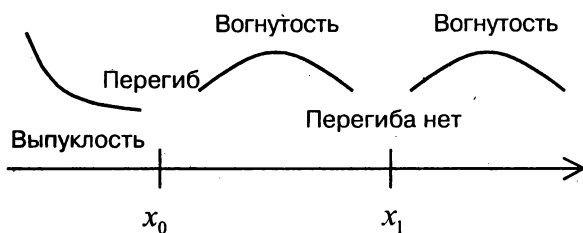


Рис. 83

Примеры.

1. $y = x^4$, $y' = 4x^3$,

$y'' = 12x^2$. Критическая точка

для y'' : $x = 0$ $y''|_{x=0} = 0$.

Однако $y'' > 0$ и левее и правее этой точки. Перегиба нет.

2. $y = 2^x$; $y' = 2^x \ln 2$, $y'' = 2^x (\ln 2)^2$ при всех x . Везде кривая выпукла, перегибов нет.

3. $y = x^3$; $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Критическая точка для y'' : $x = 0$. При $x < 0$ $y'' < 0$ (вогнутость), при $x > 0$ $y'' > 0$ (выпуклость). Точка $(0,0)$ – точка перегиба.

4. $y = \sqrt[3]{x}$; $y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$. Критическая точка для y'' :

$x = 0$, в ней y'' не существует. При переходе через эту точку выпуклость вверх сменяется выпуклостью вниз, следовательно, $x = 0$ – абсцисса точки перегиба.

Упражнение. Рекомендуется нарисовать графики всех функций из этих примеров.

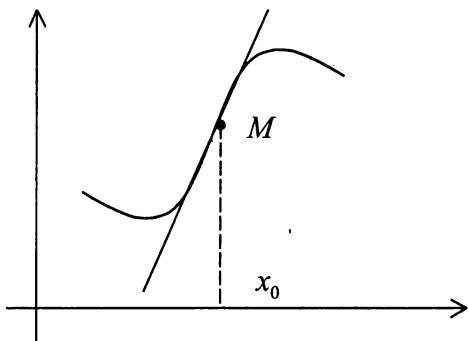


Рис. 81

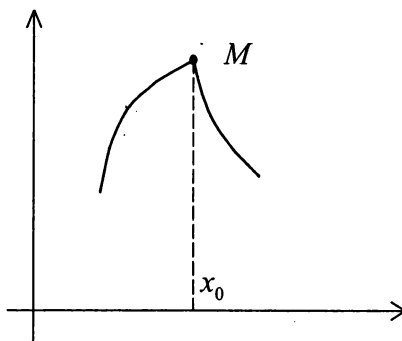


Рис. 82

5.2. Точки перегиба

Точка M на кривой, отделяющая участки выпуклости и вогнутости, называется **точкой перегиба** (рис.81).

Если в точке перегиба имеется касательная, то кривая как бы проникает здесь через свою касательную: слева она расположена по одну сторону от касательной (на рис.81 – выше), а справа – по другую (на рис.81 – ниже). Однако встречаются и такие точки перегиба, в которых касательной нет, а происходит “излом” кривой (рис.82).

Обратите внимание на некоторую разницу в структуре определений точки экстремума и точки перегиба: точка экстремума – это определенное значение аргумента, это точка оси абсцисс, а точка перегиба – точка кривой.

5.3. Необходимый признак точки перегиба

Если $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Доказательство (для ситуации рис.81). До точки перегиба график выпуклый. Это значит, что $f'(x)$ возрастает. После точки перегиба график вогнутый. Это значит, что $f'(x)$ убывает. Таким образом, в точке x_0 возрастание $f'(x)$ сменяется убыванием $f'(x)$, т.е. в точке x_0 функция $f'(x)$ имеет максимум, а значит, ее производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует. [Необходимый признак экстремума, примененный к $f'(x)$].

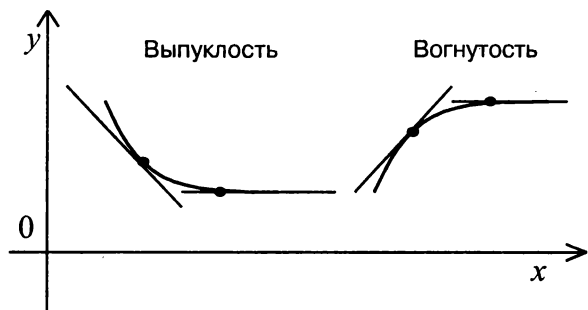


Рис. 78

Для выпуклой кривой угол наклона касательной возрастает с ростом x (на рис.79 $\beta > \alpha$), но тогда возрастает и его тангенс, т.е. $f'(x)$.

Возрастание функции характеризуется положительностью ее производной, в данном

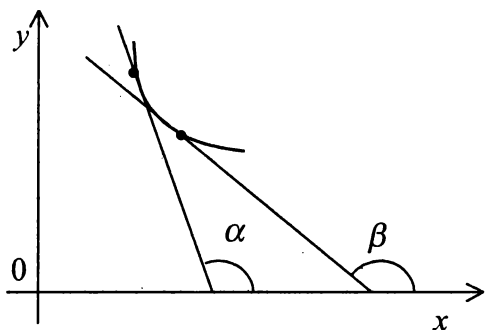


Рис. 79

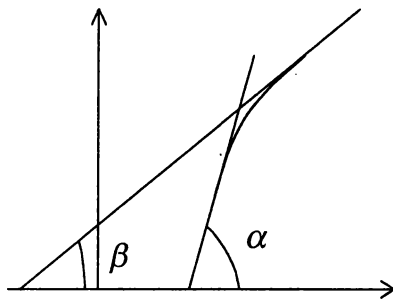


Рис. 80

случае $[f'(x)]' = f''(x)$. Итак, при выпуклости кривой $f''(x) > 0$. Точно так же видим (рис.80), что для вогнутой кривой угол наклона касательной убывает с ростом x (на рис.80 $\beta < \alpha$), значит, убывает и его тангенс, т.е. $f'(x)$ убывает и $f''(x) < 0$.

Эти рассуждения обратимы: $f''(x) > 0$ характеризует *выпуклость*, а $f''(x) < 0$ – *вогнутость*. Запомнить этот признак довольно легко: представим себе,

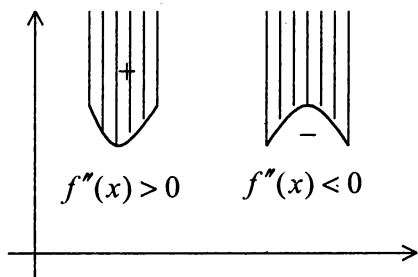


Рис. 81

что наша кривая служит крышей и идет дождь (рис.81). Тогда на выпуклой крыше вода скапливается (+), а с вогнутой – скатывается (-) (правило дождя).

4. Наибольшее значение $342\frac{1}{3}$ – в правом конце интервала. Наименьшее значение – $-\frac{7}{3}$ при $x = 2$ (нетрудно понять, что $x = 2$ будет точкой минимума).

Пример 2. Расход N (в рублях) на покрытие судном одного километра пути определяется (эмпирической) формулой

$$N = 0,54\left(\frac{a}{v} + bv^2\right),$$

где v – скорость судна в узлах (узел=1,85 км/ч), $a > 0$ и $b > 0$ – эмпирические коэффициенты, определяемые отдельно для каждого типа судов. Найти наивыгоднейшую скорость.

Здесь интервал, строго говоря, не указан, но ясно, что $v > 0$. Бездумно следовать сформулированному выше правилу нельзя. Найдем

$N'_v = 0,54\left(-\frac{a}{v^2} + 2bv\right)$. Критическая (стационарная) точка получится при

$N'_v = 0: -\frac{a}{v^2} + 2bv = 0, v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$. Поскольку при $v \rightarrow 0 N \rightarrow \infty$ и при

$v \rightarrow \infty N \rightarrow \infty$, ясно, что при $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ функция N имеет минимум и этот

минимум одновременно будет наименьшим значением N . Таким образом,

$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$ – наивыгоднейшая скорость.

§5. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривой

5.1. Выпуклость и вогнутость

График функции $y = f(x)$ на некотором интервале является *выпуклым*, если он расположен *над* любой своей касательной, и *вогнутым*, если он расположен *под* любой своей касательной (рис.78).

Часто выпуклую кривую называют *выпуклой вниз*, а вогнутую – *выпуклой вверх*.

Будем считать, что функция $f(x)$ обладает второй производной $f''(x)$.

точка $x = 0$, в которой производная не существует (разрыв), критическая, но не стационарная. При переходе через $-1/5$

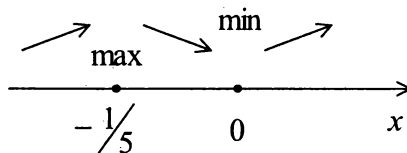


Рис. 77

y' меняет знак с + на -. Это максимум. При переходе через 0 производная меняет знак с - на +, это минимум (рис.77).

Стрелками, подобно тому как сделано на рис.77, удобно показывать (условно) возрастание ↗ и убывание ↘.

§4. Наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом интервале

Как мы знаем, всякая непрерывная на замкнутом интервале функция достигает там своего наибольшего и наименьшего значения (гл.I §7). Где они могут быть? Либо во внутренних точках – и тогда такие точки обязаны быть точками экстремума, либо на концах интервала. Отсюда вытекает следующее правило разыскания наибольших и наименьших значений.

Правило.

1. Находим производную исследуемой функции $f'(x)$.
2. Определяем критические точки.
3. Вычисляем значения функции в критических точках и в концах интервала.
4. Отбираем среди вычисленных значений самое большое и самое малое.

Чаще всего, пользуясь этим правилом, нет необходимости проверять критические точки на то, будут ли в них действительно экстремумы и какие. Все заменяется сравнением вычисленных значений функции.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 1 \text{ на } [0, 10].$$

$$1. y' = x^2 - 5x + 6.$$

$$2. y' = 0: x^2 - 5x + 6 = 0; x_1 = 2; x_2 = 3. \text{ Получились две критические}$$

точки (в этом примере они стационарные, разрывов у y' нет).

3. Составляем таблицу значений y в критических точках и в концах интервала:

x	0	2	3	10
y	-1	$-\frac{7}{3}$	$\frac{7}{2}$	$342\frac{1}{3}$

экстремума этой функции. Может также случиться, что в точке экстремума производная не существует (см. рис.61).

3.3. Достаточный признак экстремума

Если при переходе x через точку x_0 (движение по оси Ox всегда слева направо!) производная меняет знак с $+$ на $-$, то в x_0 – максимум, если же с $-$ на $+$, то минимум.

Действительно, пусть знак производной меняется с $+$ на $-$ (рис.76).

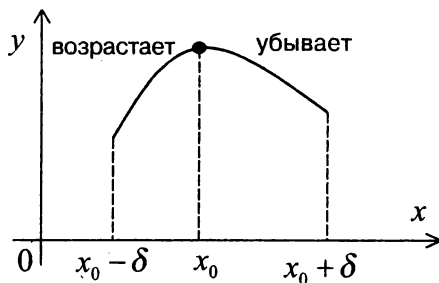


Рис. 76

Значит, левее x_0 на каком-то интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция возрастает, а правее на $(x_0, x_0 + \delta)$ – убывает. Следовательно, $f(x_0)$ больше любого значения $f(x)$ при

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. В точке x_0 – максимум. Аналогичное рассуждение для перемены знака производной с $-$ на $+$: здесь в точке x_0 убывание сменяется возрастанием и $f(x_0) < f(x), x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. В x_0 – минимум. Конечно, в x_0 функция предполагается непрерывной.

Точки, в которых производная равна нулю, называют *стационарными*. Стационарные точки и точки, в которых функция не имеет производной (хотя и непрерывна), называются *критическими*. Необходимый признак экстремума говорит о том, что “подозрительными” относительно наличия экстремума являются критические точки. Достаточный признак дает возможность проверить эти подозрения.

Пример. Найти максимумы и минимумы функции $y = (x+1)x^{2/3}$.

$$y' = x^{2/3} + \frac{2}{3}x^{-1/3}(x+1) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x+1}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Разрывов у этой функции нет, она определена на $(-\infty, +\infty)$. Критическими

будут точки $x = -\frac{1}{5}$ – в ней производная $y' = 0$; эта точка стационарная, и

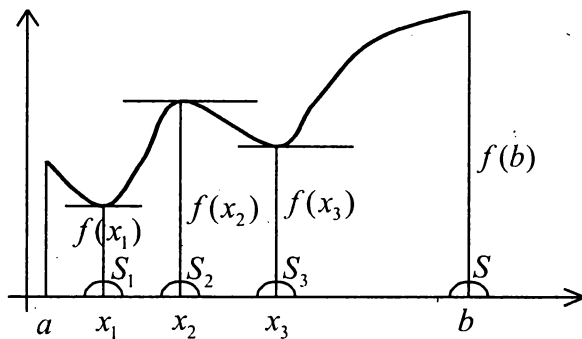


Рис. 74

не $f(x_3)$, а $f(b)$ – принимается в конце интервала. Но конец интервала не может быть точкой максимума или минимума просто потому, что любая его окрестность “вываливается” за интервал, не содержится целиком в области определения функции (на рис.74 окрестность S конца b интервала).

Упражнение. Нарисуйте графики функций, у которых: а) и наибольшее и наименьшее значения принимаются внутри интервала; б) наибольшее значение внутри интервала, а наименьшее – в правом конце; в) и наибольшее и наименьшее значения – в концах интервала.

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**, а принимаемые в них значения – **экстремумами** или **экстремальными**.

3.2. Необходимый признак экстремума (признак Ферма)

Если в точке экстремума x_0 функция имеет производную, то производная необходимо равна нулю

$$f'(x_0) = 0.$$

“Доказательство” этого можно усмотреть на рис.74, где касательные в точках кривой, отвечающих точкам экстремума, горизонтальны.

Можно провести более подробное рассуждение. Берем хорду AB (рис.75), параллельную Ox , и двигаем ее параллельно самой себе.

Момент “отрыва” будет в точке M_0 , отвечающей точке экстремума (на рис.75 – $\max$), поскольку эта точка – самая далекая от хорды AB среди всех точек дуги AM_0B . Конечно, и это “доказательство” не является точным математическим рассуждением.

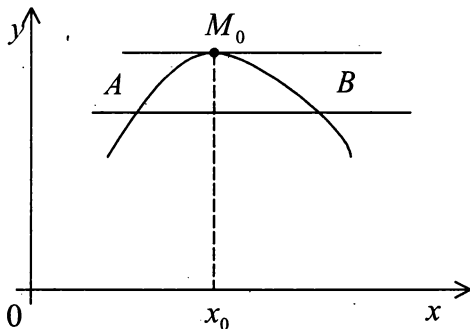


Рис. 75

Сформулированный признак не является достаточным. У функции $y = x^3$, например, $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$. Однако точка O не является точкой

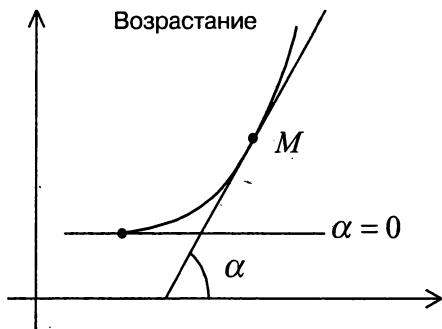


Рис. 72

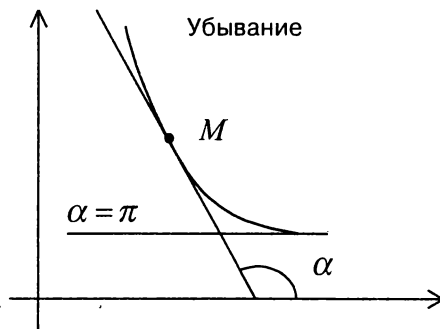


Рис. 73

§3. Экстремумы. Признаки максимума и минимума

3.1. Точки максимума и минимума

Точка x_0 называется **точкой максимума** (max) функции $f(x)$, если значение $f(x_0)$ больше любого из значений $f(x)$, принимаемых в точках некоторой окрестности точки x_0 . Точка x_0 называется **точкой минимума** (min), если значение $f(x_0)$ меньше любого из значений $f(x)$, принимаемых в точках некоторой окрестности точки x_0 .

Важно подчеркнуть локальный (местный) характер этого определения: значение функции в точке максимума вовсе не обязано быть самым большим из всех значений функции в ее области определения. Утверждается лишь, что должна найтись такая окрестность этой точки (м.б. достаточно тесная), что из всех значений в точках этой окрестности $f(x_0)$ самое большое. Аналогичный комментарий относится к точке минимума.

На рис. 74 точки минимума x_1 и x_3 . Значения $f(x_1)$ и $f(x_3)$ меньше, чем значения в любой точке окрестностей S_1 и S_3 соответственно. Однако $f(x_1) < f(x_3)$ и тем не менее x_3 – тоже точка минимума. Точка максимума на рис. 74 одна, это x_2 . Значение $f(x_2)$ больше всех значений в окрестности S_2 . Однако самое большое значение $f(x)$ на всей области определения $[a, b]$ –

ее производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Поэтому вводят более широкие классы функций: функция $f(x)$ называется *неубывающей на некотором интервале*, если из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_2) \geq f(x_1)$, и *невозрастающей*, если из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_2) \leq f(x_1)$ (x_1 и x_2 – произвольная пара значений аргумента, взятых на нашем интервале). Таким образом, для неубывающей функции при $x_1 < x_2$ в неравенстве $f(x_2) \geq f(x_1)$ допускается равенство (для возрастающей – строгое неравенство). Аналогичное сравнение делается для невозрастающей и убывающей функции. Признак получает теперь более законченную формулировку: чтобы дифференцируемая во всех точках интервала функция $f(x)$ была неубывающей, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на этом интервале, а чтобы функция была невозрастающей, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \leq 0$.

Достаточность следует опять из формулы Лагранжа. Докажем необходимость, рассматривая неубывающую функцию. Возьмем какое-то значение x на нашем интервале и сделаем приращение $\Delta x > 0$ аргументу. По условию неубывания

$$f(x + \Delta x) \geq f(x), \text{ т.е. } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0. \text{ Но тогда } \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \text{ и}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, т.е. $f'(x) \geq 0$. (Предел неотрицательной переменной неотрицателен).

Возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие функции называют *монотонными*, а интервал, на котором функция возрастает (соответственно не убывает, убывает или не возрастает), называется *интервалом монотонности*. Полученные сейчас признаки монотонности имеют простой геометрический смысл (рис.72, 73).

Возрастание (неубывание) характеризуется тем, что угол α наклона касательной острый (или $=0$) и, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x) \geq 0$. При *убывании (невозрастании)* угол α тупой (или $=\pi$) и $\operatorname{tg} \alpha = f'(x) \leq 0$.

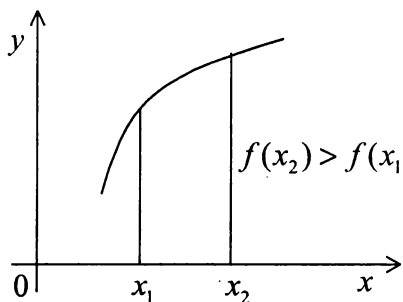


Рис. 70

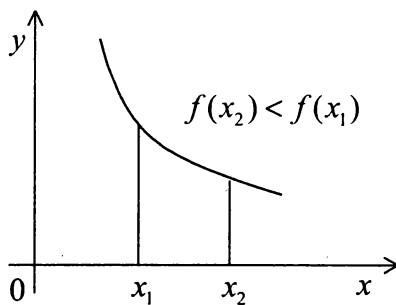


Рис. 71

На рис.70 – функция возрастающая, на рис.71 – убывающая.

2.2. Признак возрастания и убывания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках какого-то интервала и производная $f'(x)$ ее *положительна в каждой точке*, то функция *возрастает на этом интервале*. Если же производная $f'(x)$ *отрицательна*, то $f(x)$ *убывает*.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (2)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где c – какая-то точка между x_1 и x_2 (и, значит, лежащая на рассматриваемом интервале – ведь x_1 и x_2 оттуда). Если во всех точках интервала $f'(x) > 0$, то, в частности, и $f'(c) > 0$, и тогда $f(x_2) > f(x_1)$ – функция возрастает. Если же $f'(x) < 0$, то, в частности, и $f'(c) < 0$ и $f(x_2) < f(x_1)$ – функция убывает.

Пример. Показать, что функция $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x$ на интервале $(-5, 1)$

убывает. Находим производную $y' = x^2 + 4x - 5 = x^2 + 5x - x - 5 = x(x + 5) - 1(x + 5) = (x + 5)(x - 1)$. На указанном интервале множитель $x + 5 > 0$, а $x - 1 < 0$. Значит, $y' < 0$ в этом интервале и функция убывает.

Обратное утверждение к приведенному признаку: если $f(x)$ возрастает, то $f'(x) > 0$ в таком виде несправедливо: в некоторых точках $f'(x)$ может обращаться в нуль. Например, $f(x) = x^3$ возрастает на всей оси $(-\infty, +\infty)$, а

уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (рис.69).

Координаты концов A и B этой кривой будут $A(\varphi(a), \psi(a))$, $B(\varphi(b), \psi(b))$. Угловым коэффициентом хорды AB

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$. Угловым коэффициентом касательной в какой-то точке кривой

будет $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ – по правилу дифференцирования параметрически заданной

функции. Пусть M_0 – та точка на кривой, в которой касательная M_0T параллельна хорде AB ; если $t = c$, $a < c < b$ – значение параметра t , которому отвечает

точка M_0 , то угловым коэффициентом касательной будет $\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}$.

Приравнивая угловые коэффициенты хорды AB и касательной M_0T , получаем формулу (3). Заметим, что знаменатель правой части в равенстве (3) заведомо не нуль (как и в левой части), так как по теореме Лагранжа $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(d)(b - a)$, а $\varphi'(x) \neq 0$ по предположению ни в какой точке#.

Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши. Если положим $\psi(x) = f(x)$, а $\varphi(x) = x$, то

$$\psi(b) - \psi(a) = f(b) - f(a), \varphi(b) - \varphi(a) = b - a,$$

а из (3) получается (1) – теорема Лагранжа.

§2. Монотонные функции. Признаки возрастания и убывания функции

2.1. Напоминание определений

Напомним, что функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором интервале, если для любых двух значений ее аргумента (взятых из этого интервала) большему значению аргумента отвечает большее значение функции, т.е. если $x_1 < x_2$, то и $f(x_1) < f(x_2)$ (гл. I §3). Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. если $x_1 < x_2$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Условие $f'(c) = 0$ означает, что касательная параллельна оси абсцисс. На рис.67 таких точек две.

Следствие. Между любыми двумя корнями функции лежит по крайней мере один корень производной.

Корнями какой-то функции $f(x)$ являются те значения аргумента, при которых значение функции равно нулю.

Иными словами, корни функции $f(x)$ – то же, что и корни уравнения $f(x) = 0$.

На рис.68 корни $f(x)$ – это точки

x_1, x_2, x_3 , а корни производной $c_1, c_2,$

c_3, c_4 ($f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = f'(c_4) = 0$).

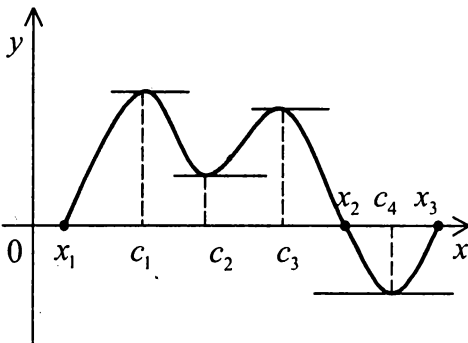


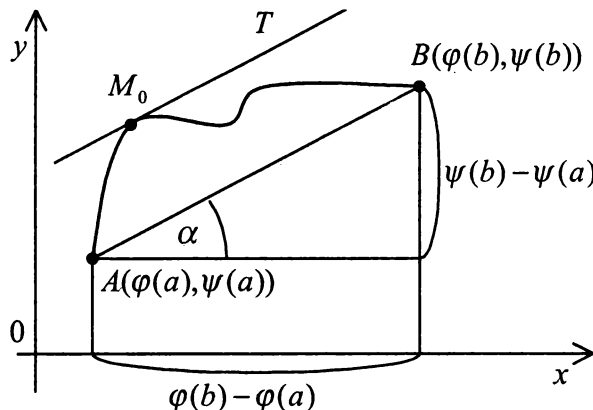
Рис. 68

Между корнями x_2 и x_3 функции $f(x)$ лежит корень c_4 производной $f'(x)$: $f'(c_4) = 0$, а между корнями x_1 и x_2 $f(x)$ – даже три корня $f'(x)$: c_1, c_2, c_3 .

1.4. Теорема Коши

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы по крайней мере во внутренних точках интервала [т.е. на (a, b)], причем $\varphi'(x)$ не

обращается в нуль. Тогда найдется точка c , $a < c < b$, такая, что



$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \quad (3)$$

Сменим обозначение аргумента x на t для данных функций и рассмотрим кривую с параметрическими

Рис. 69

интервала. Тогда внутри интервала найдется точка c такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (1)$$

Действительно, в этом случае (рис.66) тангенс угла α наклона хорды AB

есть $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (из треугольника ABD).

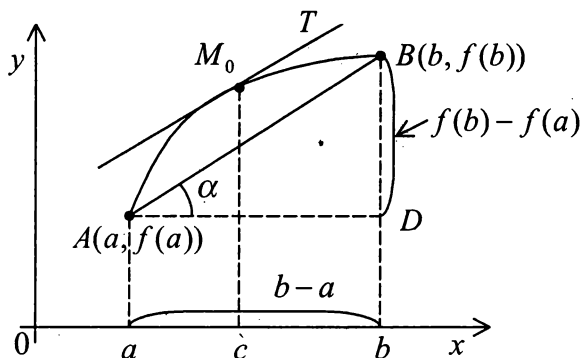


Рис. 66

Если M_0 та точка, в которой касательная параллельна хорде, то согласно геометрическому смыслу производной угловой коэффициент касательной равен $f'(c)$ (c – абсцисса

M_0). В силу параллельности касательной и хорды их угловые коэффициенты равны и получается равенство (1)#.

Теорему Лагранжа называют теоремой о конечных приращениях, а формулу (1) – формулой конечных приращений.

Дело в том, что по определению производной $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, а в правой

части (1) фигурируют приращения аргумента $b - a$ и функции $f(b) - f(a)$ на конечном интервале, длина которого и не думает стремиться к нулю. Формулу (1) полезно также использовать в следующей записи:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

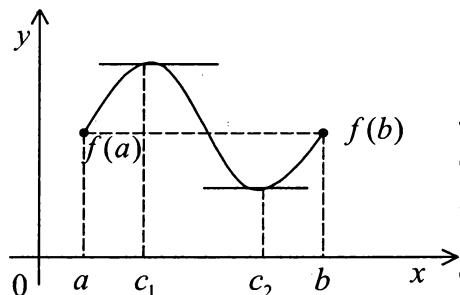


Рис. 67

1.3. Теорема Ролля

Если в условиях теоремы Лагранжа значения функции в концах интервала одинаковы: $f(b) = f(a)$, то найдется точка $a < c < b$, в которой $f'(c) = 0$.

Действительно, теперь в (1) числитель равен нулю (рис.67)#.

ГЛАВА III. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§1. Теорема о хорде и касательной (Ролль, Лагранж, Коши)

1.1. Геометрическое утверждение

Рассмотрим кривую L на плоскости, стягиваемую хордой AB .

Теорема. Предположим, что кривая имеет в каждой своей точке касательную.

Тогда на кривой найдется такая точка M_0 , в которой касательная M_0T будет параллельна хорде AB .

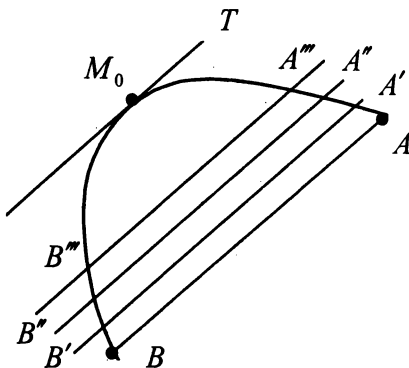


Рис. 64

несколько (рис.65), но важно, что такие точки существуют.

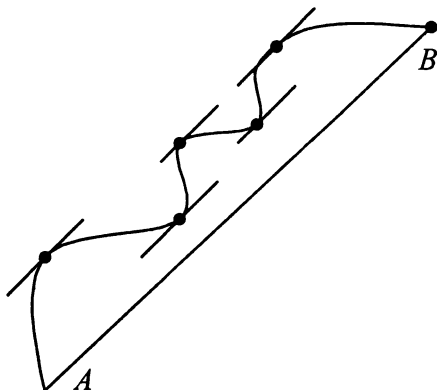


Рис. 65

“Доказательство”. Будем двигать хорду AB параллельно самой себе. На рис.64 показаны некоторые промежуточные положения хорды: $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ и т.д. Концы движущей хорды сближаются и в момент “отрыва” движущей хорды от кривой сливаются в точке M_0 . Хорда превращается в касательную M_0T . По построению M_0T параллельна AB .

Заметим, что точек, в которых касательная параллельна хорде, может быть

Мы взяли слово “доказательство” в кавычки потому, что приведенное рассуждение не является строгим математическим доказательством – это лишь наглядное разъяснение факта. Теперь мы дадим точные формулировки, когда факт о параллельности касательной хорде на самом деле имеет место. Однако строгих доказательств приводить не будем – см. [2] гл.IV §1-3 и [1] гл.VI §1.

1.2. Теорема Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и имеет производную во всех внутренних точках этого

$$a = v'(t) = [S'(t)]' = S''(t).$$

Значит, ускорение есть вторая производная от пути по времени.
В другой записи

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Для общей функциональной зависимости $y = f(x)$ мы трактовали y' как скорость изменения функции y относительно аргумента x . Теперь на y'' можно смотреть как на ускорение изменения функции относительно аргумента x . (Последнее, впрочем, не слишком полезно).

(Читается: “игрек два штриха”, “эф два штриха от икс”).

Продифференцировав вторую производную, получаем третью:

$$y''' = f'''(x) = (y'')' = [f''(x)]'$$

и т.д. Для производных четвертого и более высоких порядков расставлять штрихи становится неудобным и наверху ставят просто номер этой производной:

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = [f'''(x)]', y^{(5)} = f^{(5)}(x) = [f^{(4)}(x)]', \dots$$

Номер производной не следует путать с показателем степени, поэтому он записывается в круглых скобках.

7.2. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим теперь дифференциал функции $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx.$$

В нем две переменные: x и dx . При образовании дифференциалов высших порядков dx для всех x считается одинаковым и с ним следует обращаться как с постоянной величиной.

Второй дифференциал d^2y [читается “дэ два игрек” функции $y = f(x)$] определяется как дифференциал от дифференциала dy (этот последний теперь естественно называть первым дифференциалом):

$$d^2y = d[dy] = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = [f'(x)]'dx^2 = f''(x)dx^2.$$

Точно так же:

$$d^3y = d[d^2y] = d[f''(x)dx^2] = [f''(x)dx^2]'dx = [f''(x)]'dx^3 = f'''(x)dx^3$$

и т.д.

Обратите внимание, что $dx^2 = (dx)^2 \neq d(x^2)$; $dx^3 = (dx)^3 \neq d(x^3)$. Для производных разных порядков теперь получаются формулы:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

(Читается “дэ игрек по дэ икс”, “дэ два игрек по дэ икс в квадрате”, и т.д.).

7.3. Механический смысл второй производной

Пусть $S = f(t)$ – закон движения точки (S – пройденный путь, t – время).

В задаче 1, с которой начался §1, мы нашли, что скорость $v = S'(t)$ – первой производной от пути по времени, а в задаче 3, что ускорение $a = v'(t)$ – производной от скорости по времени. Сопоставляя эти два результата, получаем

$$\sqrt{1+\gamma} = \sqrt{1} + \Delta y \approx 1 + dy = 1 + \frac{1}{2}\gamma.$$

Конечно, вычислить $1 + \frac{1}{2}\gamma$ существенно проще, чем $\sqrt{1+\gamma}$.

Пример 2. $tg44^\circ$. Рассматриваем функцию $y = tgx$.

При $x = \frac{\pi}{4}$ $tg \frac{\pi}{4} = 1 (\frac{\pi}{4} = 45^\circ)$. Чтобы перейти от $tg45^\circ$ к $tg44^\circ$, мы

должны взять $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$.

$$tg44^\circ = tg45^\circ + (tg45^\circ - tg44^\circ) = 1 + \Delta y \approx 1 + dy.$$

$$dy = \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x = \frac{1}{\cos^2 \pi/4} \Delta x = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{180} \right) = -\frac{\pi}{90} \approx -\frac{3,14}{90} \approx -0,035.$$

$$tg44^\circ \approx 1 - 0,035 = 0,965.$$

6.6. Еще раз о дифференцируемости функции

Мы называли функцию дифференцируемой в данной точке, если она имеет производную в этой точке. Поскольку производная и дифференциал существуют или не существуют одновременно, мы можем сказать и так: функция дифференцируема в некоторой точке, если она имеет в этой точке дифференциал.

§7. Производные и дифференциалы разных порядков

7.1. Производные высших порядков

Рассмотрим какую-то дифференцируемую функцию $f(x)$ и найдем ее производную $y' = f'(x)$. Рассматривая $f'(x)$ как новую функцию, продифференцируем ее (если, конечно, она дифференцируема):

$$(y')' = [f'(x)]'.$$

Получившуюся новую производную называют второй производной от функции $y = f(x)$ [и тогда производную $y' = f'(x)$ естественно называть первой производной]. Вторую производную обозначают так:

$$y'' = f''(x).$$

Запись та же, но смысл иной: если u – независимая переменная, то $du = \Delta u$ – произвольному приращению u , а если u – функция от x , то $du = u'_x \Delta x$ и здесь уже $du \neq \Delta u$, хотя и составляет главную часть от Δu .

6.4. Геометрический смысл дифференциала

Отрезок NT , изображающий dy , есть приращение ординаты точки,двигающейся по касательной (в то время как $NM' = \Delta y$ – приращение функции,

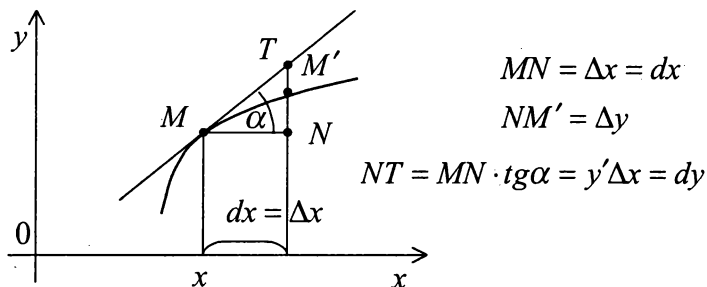


Рис. 63

приращение ординаты точки, двигающейся по кривой). На рис.63 $dy > \Delta y$. Попробуйте самостоятельно нарисовать ситуацию, когда $dy < \Delta y$.

6.5. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

При малых Δx дифференциал мало отличается от приращения функции

$$\Delta y \approx dy = f'(x) \Delta x \quad \text{и} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

На этом основаны многочисленные формулы, применяющиеся в приближенных вычислениях.

Пример 1. Вычислить приближенно $\sqrt{1+\gamma}$, где γ – малое число.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. При $x = 1$ ее значение сразу вычисляется:

$\sqrt{1} = 1$. Примем за начальное значение $x = 1$ и пусть $\Delta x = \gamma$. Тогда

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x = \frac{1}{2} \gamma,$$

$$d(Cu) = Cdu \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим функцию $y = x$, совпадающую с независимым переменным x . Поскольку для нее $y' = 1$, то получаем:

$$dx(= dy) = 1 \cdot \Delta x, \quad dx = \Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной равен ее произвольному приращению. Поэтому для любой функции $y = f(x)$ можно записать

$$dy = f'(x)dx = y'dx \quad (dx = \Delta x!), \quad (5)$$

т.е. дифференциал функции есть произведение производной на дифференциал независимой переменной.

Из этого получаем, что

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (6)$$

Производная есть отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного. Запись производной в этом виде удобна тем, что

напоминает нам об определении производной как $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$. ($\frac{dy}{dx}$ читается “дэ игрек по дэ икс”).

Правило дифференцирования сложной функции теперь можно получить чисто формальной арифметической операцией:

$$y = f(z), z = \varphi(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

(умножили и разделили на dz), что то же самое как $y'_x = y'_z \cdot z'_x$.

6.3. Инвариантность формы записи дифференциала

Само правило дифференцирования сложной функции теперь можно сформулировать так: дифференциал функции $y = f(u)$ имеет форму записи

$$dy = f'(u)du$$

независимо от того, будет ли аргумент независимой переменной или функцией от независимой переменной. Действительно, если $u = \varphi(x)$, то

$$y'_x = y'_u u'_x \text{ и } dy = y'_x dx = y'_u \cdot u'_x dx = y'_u du = f'(u)du.$$

Этот факт называют теоремой об инвариантности (неизменности) формы записи дифференциала.

Вспомним, что

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

где α – бесконечно малая величина вместе с Δx . (Связь предела и бесконечно малых). Отсюда

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x = dy + \alpha \Delta x.$$

Величина $\alpha \Delta x$ является бесконечно малой высшего порядка в сравнении с Δx :

$$\lim \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim \alpha = 0.$$

Таким образом, дифференциал есть величина, пропорциональная приращению аргумента Δx и при бесконечно малом приращении аргумента Δx отличающаяся от приращения функции Δy на бесконечно малую высшего порядка, чем Δx .

Напомним, что две бесконечно малые γ и δ эквивалентны ($\gamma \sim \delta$) тогда и только тогда, когда их разность $\gamma - \delta$ имеет более высокий порядок малости в сравнении с каждой из них. В этом случае говорят также, что каждая из этих двух величин является *главной частью* другой. Вернемся к дифференциалу. Если в рассматриваемой точке x производная $f'(x) \neq 0$, то получаем из того, что

$$\Delta y - dy = \alpha \Delta x: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{f'(x) \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 0,$$

т.е. дифференциал оказывается *главной частью* (и к тому же пропорциональной Δx) приращения Δy : дифференциал (при $f'(x) \neq 0$) есть *главная часть* приращения Δy , пропорциональная Δx .

6.2. Правила нахождения дифференциалов функций

Правила нахождения дифференциалов функций мгновенно получаются из правил нахождения производных, например:

$$d(uv) = du \cdot v + dv \cdot u,$$

$$y^2 + 2xyy' = e^{x-y}(1 - y'), \quad y' = \frac{e^{x-y} - y^2}{2xy + e^{x-y}} = \frac{xy^2 - y^2}{2xy + xy^2} = \frac{y(x-1)}{x(2+y)}.$$

(При упрощении выражения для y' мы использовали исходное уравнение).

5.4. Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть переменные x и y заданы как функции переменной t (параметра):

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t).$$

Можно считать, что y есть функция от x (см. §4 гл.1): надо (мысленно!) из уравнения для x вычислить t , как функцию от x (обратную к $x = \varphi(t)$), и подставить в выражение для y :

$$x = \varphi(t), t = \phi(x) \quad y = \psi(\phi(x)).$$

Вычислим y'_x :

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (3)$$

Эта формула имеет многочисленные применения (в частности, в механике).

Пример. $x = a \cos t, y = b \sin t$ (параметрические уравнения эллипса)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad x'_t = -a \sin t, y'_t = b \cos t; \quad y'_x = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}.$$

§6. Дифференциал

6.1. Определение дифференциала

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение производной $y' = f'(x)$, вычисленной в этой точке, на произвольное приращение аргумента Δx . Дифференциал обозначается символом dy или $df(x)$. Знаки дифференциала читаются “дэ игрек”, “дэ эф от икс”. Таким образом

$$dy = y' \Delta x \quad \text{или} \quad df(x) = f'(x) \Delta x. \quad (4)$$

Зная производную, мы сразу находим дифференциал и, наоборот, зная дифференциал, находим производную. Поэтому нахождение дифференциала, как и нахождение производной, называется дифференцированием.

$$\frac{1}{y} y' = (2^x \ln \operatorname{tg} 3x)' = 2^x \ln 2 \cdot \ln \operatorname{tg} 3x + 2^x \frac{1}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3,$$

$$y' = (\operatorname{tg} 3x)^{2^x} (2^x \ln 2 \cdot \operatorname{tg} 3x + 2^x \frac{1}{\operatorname{tg} 3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3).$$

Во всех разбираемых примерах мы не производим преобразования получившегося выражения для y' в более удобную форму – нам важно показать только *этапы* дифференцирования. В практике же решения примеров и задач такие преобразования, конечно, необходимо делать. Так, например, ответ последнего примера запишется:

$$y' = (\operatorname{tg} 3x)^{2^x} \cdot 2^x \left(\operatorname{tg} 3x \cdot \ln 2 + \frac{6}{\sin 6x} \right).$$

5.3. Дифференцирование неявной функции

Пусть функция y (от x) задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (*)$$

связывающим переменные x и y , но нерешенным относительно y .

Заданная функция $y = y(x)$ называется (см. гл. I §4) неявной. Если мы подставим $y = y(x)$ в уравнение (*), то получаем уже тождество по x :

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Тогда дифференцируем левую часть по обычным правилам, но помня, что y есть функция от x , пусть и не выписанная явно. Производная же правой части равна нулю. В результате получится уравнение, связывающее x , y и y' .

Из этого уравнения определяем y' через x и y .

Пример 1. Неявная функция задана уравнением

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{или} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0). \text{ Дифференцируем:}$$

$$\frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{9} = 0, \quad \frac{x}{2} = -\frac{2y}{9} y', \quad y' = -\frac{9x}{4y}.$$

Пример 2. Функция задана уравнением

$$xy^2 = e^{x-y}.$$

Дифференцируем обе части:

$$y' = \frac{1}{\cos^2[(\sqrt{x}+1)]^5} \cdot [(\sqrt{x}+1)^5]' = \frac{1}{\cos^2[(\sqrt{x}+1)]^5} \cdot$$

$$\cdot 5(\sqrt{x}+1)^4 \cdot (\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{\cos^2[(\sqrt{x}+1)]^5} \cdot 5(\sqrt{x}+1)^4 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}.$$

Еще пример:

$$y = \frac{\ln 3x}{1+x^3}$$

$$y' = \frac{(\ln 3x)'(1+x^3) - (1+x^3)' \ln 3x}{(1+x^3)^2} = \frac{\frac{1}{3x} \cdot 3(1+x^3) - 3x^2 \cdot \ln 3x}{(1+x^3)^2}.$$

5.2. Логарифмическое дифференцирование

Иногда встречаются функции, у которых переменными являются и основание степени и показатель степени, например, функции x^x , $(\lg 3x)^{2^x}$ и т.п. Такую функцию нельзя дифференцировать как показательную, потому что у нее переменное основание, но нельзя и как степенную – показатель степени у нее также переменный. Чтобы продифференцировать такую функцию, надо вначале ее прологарифмировать, а затем дифференцировать логарифм. Покажем это на примерах.

1. $y = x^x$ $\ln y = x \ln x$. Производная левой части (помним, что y есть

функция от x !) будет $\frac{1}{y} y'$, где y' – интересующая нас производная. Получаем:

$$\frac{1}{y} y' = (x)' \ln x + (\ln x)' x = \ln x + \frac{1}{x} x = \ln x + 1.$$

Отсюда

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

2. $y = (\lg 3x)^{2^x}$.

$$\ln y = 2^x \ln \lg 3x$$

$$13. (\cos x)' = -\sin x$$

$$14. (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$15. (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$16. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$17. (\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$18. (\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$19. (\text{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$$

§5. Техника дифференцирования

5.1. Примеры

Для того чтобы уверенно продифференцировать любую элементарную функцию, мало твердо знать таблицу основных правил и формул. Это необходимое, но совершенно не достаточное условие. Надо приобрести опыт в разбивании данной для дифференцирования функции в цепочку, состоящую из функций промежуточных аргументов. Сначала это надо делать, записывая явно такую цепочку, но умение дифференцировать приходит лишь тогда, когда овладеваем навыком делать это “в уме”.

Пример.

$$y = tg[(\sqrt{x} + 1)]^5. \text{ Цепочка } y = tgz, z = u^5, u = \sqrt{x} + 1 = x^{1/2} + 1.$$

Дифференцируем:

$$y'_x = \frac{1}{\cos^2[(\sqrt{x} + 1)]^5} \cdot 5(\sqrt{x} + 1)^4 \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-1/2}\right).$$

При определенном навыке мы бы вели дифференцирование так:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отметим, что здесь перед корнем надо брать знак плюс.

$y = \arctg x$. Обратная функция $x = tgy$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Формулы для $(\arccos x)'$ и $(\arccotg x)'$ см. ниже в перечне основных формул дифференцирования.

Таблица основных правил и формул дифференцирования

$$1. (u + v + \dots + w)' = u' + v' + \dots + w'$$

$$2. (u - v)' = u' - v'$$

$$3. (Cu)' = Cu'$$

$$4. (u \cdot v \cdot \dots \cdot w)' = u' \cdot v \cdot \dots \cdot w + v' \cdot u \cdot \dots \cdot w + \dots + w' \cdot u \cdot \dots$$

$$5. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$6. y = f(u), u = \varphi(x) : \dot{y}'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$7. (C)' = 0$$

$$8. (x)' = 1$$

$$9. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$10. (a^x)' = a^x \ln a; (e^x)' = e^x$$

$$11. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$12. (\sin x)' = \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } (tgx)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Воспользовались правилом дифференцирования дроби. Точно так же найдем

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

VI. Производная обратной функции.

Если задана функция $y = f(x)$, то, решив это уравнение относительно x , получим x как функцию от y : $x = \varphi(y)$. Эта функция является обратной к функции $y = f(x)$. Найдем производную x'_y :

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \text{ (при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ и } \Delta y \rightarrow 0 \text{)} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

Производные обратных функций являются обратными величинами

(величины A и B – обратные, если $B = \frac{1}{A}$).

VII. Производная логарифмической функции.

$y = \log_a x$. Обратная функция $x = a^y$. Тогда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \text{ При } a = e \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

VIII. Производные обратных тригонометрических функций.

$y = \arcsin x$. Обратная функция $x = \sin y$.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2. \quad x + \Delta x, y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой тригонометрии для разности синусов двух углов. Теперь вспоминаем, что $\sin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$ и получаем

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x \quad (\text{по непрерывности функции } \cos x). \end{aligned}$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$. Производная синуса есть косинус. Найдём

производную косинуса. $(\cos x)' = \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]' =$ (по формулам приведения

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x \right)' =$$

дифференцирования сложной функции: $\sin z, z = \frac{\pi}{2} - x$)

$$= \sin x \cdot (-1) = -\sin x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Производная косинуса – синус, взятый со знаком минус.

Пример. $[\cos(2^{x^3})]'$. Сложная функция: $y = \cos z, z = 2^u, u = x^3$.

Получаем:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x = -\sin(2^{x^3}) \cdot 2^{x^3} \cdot \ln 2 \cdot 3x^2.$$

$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, производная степенной функции x^n равна показателю степени, умноженному на x^{n-1} (т.е. снова на степенную функцию, но с показателем степени на единицу меньше, чем у исходной).

Пример. $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)' = 2 \cdot (x^3)' - 3(x^2)' + 4(x)' =$
 $= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 4 = 6x^2 - 6x + 4.$

IV. Производная показательной функции $y = a^x$, $a > 0$ – заданное число.

1. $x; y = a^x.$

2. $x + \Delta x; y + \Delta y = a^{x+\Delta x}.$

3. $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$

4. $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$

Мы вынесли a^x за знак предела, т.к. сейчас x и значит a^x не меняются (являются постоянными, меняется Δx). Вспоминаем таблицу эквивалентных бесконечно малых (гл. I):

$a^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln a$ при $\alpha \rightarrow 0$ и значит $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a.$

Подставляем это в разыскиваемый предел, используя свойства эквивалентных бесконечно малых:

$y' = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.$

Итак, $(a^x)' = a^x \ln a$. В частности, при $a = e$, $(e^x)' = e^x$.

Производная показательной функции равна самой этой функции, умноженной на натуральный логарифм основания.

Пример. $(2^{x^3})' = 2^{x^3} \ln 2 \cdot (x^3)' = 2^{x^3} \cdot \ln 2 \cdot 3x^2$

Мы имеем здесь сложную функцию:

$y = 2^z, z = x^3$

и воспользовались правилом дифференцирования таких функций.

V. Производные тригонометрических функций

$(\sin x)' = \cos x.$

1. $x, y = \sin x.$

лишь некоторых из этих формул.

I. $C' = 0$. Производная постоянной величины есть нуль.

1. $x; y = C$.

2. $x + \Delta x; y = C$.

3. $\Delta y = C - C = 0$.

4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

II. $(x)' = 1$. Производная независимого переменного по нему самому равна единице. Сейчас рассматривается функция $y = x$.

1. $x; y = x$.

2. $x + \Delta x; y + \Delta y = x + \Delta x$.

3. $\Delta y = \Delta x$.

4. $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Пример. $(3x - 7)' = (3x)' - (7)' = 3x' - 0 = 3 \cdot 1 = 3$

III. Производная степенной функции $y = x^n$. Считаем n натуральным числом. Тогда $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ раз}}$. Применяем правило дифференцирования

произведения (нескольких сомножителей) и то, что $(x)' = 1$. Получаем

$$\begin{aligned} (x^n)' &= (x \cdot x \cdot \dots \cdot x)' = \\ &= \overbrace{(x)' \cdot \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n-1} + (x) \cdot \underbrace{x' \cdot \dots \cdot x}_{n-1} + \dots + (x) \cdot \underbrace{x \cdot \dots \cdot x'}_{n-1}}^{n \text{ слагаемых}} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Итак, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Можно показать, что формула верна и при любом показателе степени, например

$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

перемножаются несколько функций:

$$(uv...w)' = u'v...w + v'u...w + ... + w'uv...$$

Вывод правила IV мы опустим – см. [2] гл.III §7 и [1] гл.V §4.

V. Дифференцирование сложной функции (функции от функции).

Пусть задана функция от функции: $y = f(u)$, причем $u = \varphi(x)$. Ясно, что в конечном счете y является функцией от x : $y = f[\varphi(x)]$. В этом случае (см. гл. I) $y = f(u)$ называют заданной функцией, а $u = \varphi(x)$ – промежуточным аргументом; x является независимой переменной.

Тогда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Производная сложной функции по независимой переменной равна производной заданной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной. Выведем это правило.

$$1. x; u = \varphi(x); y = f(u).$$

$$2. x + \Delta x, u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), y + \Delta y = f(u + \Delta u).$$

$$3. \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

$$4. y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \text{(разделили и умножили)}$$

$$\text{на } \Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x) = y'_u \cdot u'_x.$$

Мы воспользовались тем, что $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция и, стало быть, непрерывная. Поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta u \rightarrow 0$. Использовано также свойство предела произведения. Правило, естественно, распространяется на производные от сложных функций более “длинного” устройства. Пусть $y = f(z)$, $z = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$. Тогда y есть функция от x , но заданная как функция от промежуточного переменного z , которое в свою очередь зависит от промежуточного аргумента u , и, наконец, u зависит от x . В этом случае

$$y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x.$$

§4. Производные основных элементарных функций

Перечень свойств производной и формул производных от основных элементарных функций см. в конце этого параграфа. Мы остановимся на выводе

$$2. x + \Delta x; y + \Delta y = Cu(x + \Delta x).$$

$$3. \Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)] = C\Delta u.$$

$$4. y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C\Delta u}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = Cu'.$$

(Воспользовались свойством предела).

$$\text{II. } y = u + v + \dots + w.$$

$$1. x; y = u(x) + v(x) + \dots + w(x).$$

$$2. x + \Delta x; y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) + \dots + w(x + \Delta x).$$

$$3. \Delta y = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) + \dots + w(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x) + \dots + w(x)] = (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)) + \dots + (w(x + \Delta x) - w(x)) = \Delta u + \Delta v + \dots + \Delta w.$$

$$4. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \dots + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = (\text{Предел суммы!}) = u' + v' + \dots + w'$$

$$\text{Следствие. } y = u - v = u + (-1)v.$$

$$y' = u' + ((-1)v)' = u' + (-1)v' = u' - v'$$

$$\text{III. Произведение } y = uv.$$

$$1. x; y = u(x)v(x) = uv.$$

$$2. x + \Delta x; y + \Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + \Delta u \cdot v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

$$3. \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

$$4. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = u'v + v'u + u' \cdot 0 = u'v + v'u.$$

Мы воспользовались свойствами пределов и тем, что функция v , будучи дифференцируемой, непрерывна и поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$. Правило

дифференцирования произведения распространяется на случай, когда

§3. Основные свойства производной (правила дифференцирования)

При вычислении производной той или иной конкретной функции нет нужды обязательно прибегать к тем четырем операциям, из которых состоит определение производной. Можно пользоваться основными правилами и формулами дифференцирования, которые устанавливаются раз и навсегда и освобождают процесс нахождения производной конкретной функции от нахождения Δu по Δx и разысканию предела (1). Определение (1) используется для установления этих основных правил и формул, а затем к нему можно не прибегать.

Будем рассматривать дифференцируемые функции $u, v, \dots, w$, часто не указывая явно их аргумента.

I. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(Cu)' = Cu'.$$

II. Производная суммы нескольких функций равна сумме соответствующих производных от слагаемых

$$(u + v + \dots + w)' = u' + v' + \dots + w'.$$

Следствие: производная разности есть разность производных

$$(u - v)' = u' - v'.$$

III. Производная произведения равна произведению производной первого множителя на второй плюс произведение производной второго множителя на первый:

$$(uv)' = u'v + v'u \quad (uv)' \neq u'v' \quad !$$

IV. Дифференцирование частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'} \quad !$$

Здесь, кроме дифференцируемости u и v , предполагается, что знаменатель v не обращается в нуль (в точке, где происходит дифференцирование). Словами: производная дроби есть дробь, знаменатель которой есть квадрат знаменателя исходной дроби, а числитель равен производной исходного числителя, умноженной на знаменатель минус производная исходного знаменателя, умноженная на исходный числитель.

Докажем некоторые из этих правил, производя дифференцирование в произвольной точке x и действуя согласно алгоритму из четырех шагов, описанному при определении производной.

$$I. y = Cu(x).$$

$$1. x; y = Cu(x).$$

$$f'(x_0)_{\text{прав.}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad f'(x_0)_{\text{лев.}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2)$$

Может случиться и так, что одна из этих *односторонних* производных существует, а другая – нет или что не существует ни производной, ни одной из односторонних производных.

2.3. Бесконечные значения производной

До сих пор мы считали, что в формуле (1), определяющей производную, речь идет о конечном значении предела. Именно в этом случае говорят, что функция дифференцируема в x_0 . Аналогично и в (2) подразумевались конечные значения пределов. Однако может так случиться, что предел в (1) или какой-то из пределов (2) – бесконечны [хотя функция $y = f(x)$ является непрерывной в x_0]. В этом случае у графика функции через x_0 проходит **вертикальная касательная** (рис.62).

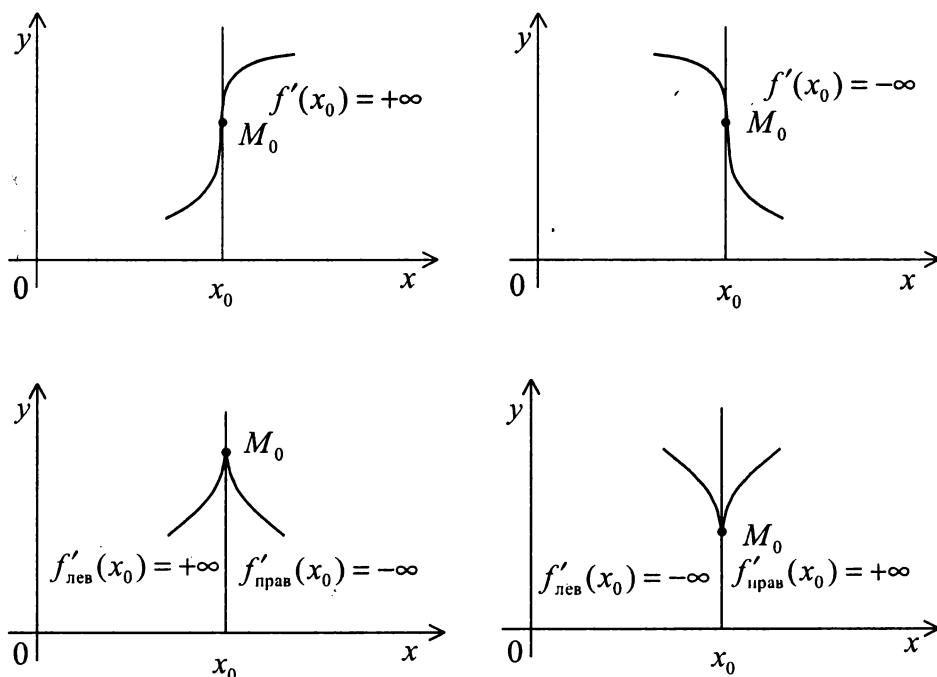


Рис. 62

Доказательство. По условию существует предел:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Согласно связи между пределом и бесконечно малыми мы можем переменную величину $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, стремящуюся к пределу, представить как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \quad \alpha - \text{бесконечно малая (вместе с } \Delta x \text{)}.$$

Тогда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Оба слагаемых в правой части этой формулы будут бесконечно малыми и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

а это и означает непрерывность функции $f(x)$ в x_0 .

Обратное утверждение неверно: из непрерывности дифференцируемость не следует (рис.61).

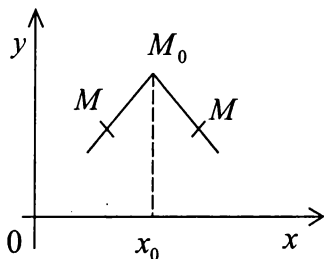


Рис. 61

В точке x_0 на рис.61 функция непрерывна.

Однако производной в этой точке нет, поскольку определенная касательная в этой точке отсутствует: при приближении точки M к M_0 справа получается одно предельное положение секущей M_0M , а при приближении слева – другое.

2.2. Правая и левая производные

При определении производной $\Delta x \rightarrow 0$ произвольным образом. Иногда, как на рис.61, при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta x > 0$ получается один предел, а при $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x < 0$, – другой. В этом случае нет производной, но говорят о правой и левой производных:

1.3. Геометрический смысл производной

Из рассмотрения задачи 2 следует: производная $f'(x)$ в некоторой точке x дает угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной в точке касания $M(x, f(x))$ к графику функции $y = f(x)$.

Чтобы написать уравнение касательной, несколько сменим обозначения. Будем обозначать координаты точки касания $M_0(x_0, f(x_0))$ – ведь среди всех точек $(x, f(x))$ на кривой выделена определенная точка. Угловым коэффициентом касательной будет $f'(x_0)$, а ее уравнение

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

В этом уравнении переменные x и y – уже координаты текущей точки на касательной прямой. Прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная к касательной, называется *нормалью* к кривой в точке M_0 . Ее угловым коэффициентом будет $-1/f'(x_0)$ (в силу условия перпендикулярности прямых), а уравнение нормали:

$$y - f(x_0) = -1/f'(x_0)(x - x_0).$$

1.4. Физические интерпретации производной (задачи 1, 3, 4)

Производная пути по времени – скорость движения $v = S'(t)$.

Производная скорости по времени – ускорение движения $a = v'(t)$.

Производная массы стержня по длине – линейная плотность $\rho = m'(x)$.

По аналогии с задачей 1 в случае общей функциональной зависимости $y = f(x)$ производную y' можно трактовать как скорость изменения функции y относительно аргумента x .

§2. Связь между наличием производной и непрерывностью

2.1. Непрерывность функции, имеющей производную

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

значение функции;

2) придавали аргументу приращение, получали новое значение аргумента и вычисляли значение функции для нового значения аргумента;

3) вычисляли приращение функции;

4) находили предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

В наиболее распространенных обозначениях для функции и аргумента $y = f(x)$ это означает следующее:

1) берем некоторое значение аргумента x , вычисляем значение функции $f(x)$;

2) даем приращение Δx аргументу, приходим к новому значению аргумента $x + \Delta x$ и вычисляем $f(x + \Delta x)$;

3) вычисляем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

4) находим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется **производной** этой **функции**

(в рассматриваемой точке x) / Производная функции $y = f(x)$ обозначается

y'_x или $f'(x)$ или, короче, просто y' (иногда говорят чуть длиннее, подчеркивая,

какой у функции аргумент: производная функции y по x . Обозначения производной читаются: “игрек штрих по икс, эф штрих по икс, игрек штрих”). При рассмотрении предела (1) следует понимать, что начальное значение x остается

фиксированным, а меняется Δx , и Δy является функцией от Δx ; ищется предел этой функции при $\Delta x \rightarrow 0$. Поскольку в каждой точке x значение производной вообще говоря свое, мы получаем новую функцию: производную от функции $y = f(x)$, чем объясняется обозначение $f'(x)$; если же надо подчеркнуть, в

какой именно точке x_0 вычислена производная, пишем $f'(x_0)$. Конечно, предел, определяющий производную, совсем не обязательно существует и тогда функция в рассматриваемой точке производной не имеет. Функция, имеющая производную в данной точке, называется **дифференцируемой** в этой точке. Нахождение производной от данной функции называется **дифференцированием** этой функции.

времени t приращение Δt ; попадаем в мгновение $t + \Delta t$. Значение скорости в момент t было $v = F(t)$, а в момент $t + \Delta t$: $v = F(t + \Delta t)$. Следовательно, за время Δt произошло изменение скорости на величину $\Delta v = F(t + \Delta t) - F(t)$. Среднее ускорение за это время будет

$$a_{cp.} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

а истинное (мгновенное) ускорение a в момент t понимается как

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}.$$

4. Плотность стержня.

Рассмотрим стержень переменной плотности (например, сделанный из разных материалов или стержень переменной толщины). Будем считать, что нам известна масса всякого участка стержня от его левого конца до длины x (рис.60):

$$m = f(x).$$

Возьмем точку x и затем сместимся в точку $x + \Delta x$. Масса участка до x будет

$$m = f(x),$$

а масса участка до $x + \Delta x$ -

$m + \Delta m = f(x + \Delta x)$. Таким образом, на

участке длины Δx произошло изменение

массы на величину $\Delta m = f(x + \Delta x) - f(x)$.

За среднюю величину плотности (линейной!, т.е. соотношенной с длиной) на участке от x до $x + \Delta x$ принимают

$$\rho_{cp.} = \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

а за истинную плотность в точке x - величину

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho_{cp.} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

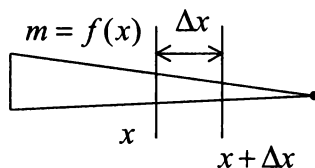


Рис. 60

1.2. Определение производной

Во всех рассмотренных выше задачах мы проделывали следующие операции над заданными в них функциями:

- 1) взяв некоторое значение аргумента, вычисляли соответствующее

ее точке M (точка касания) называется предельное положение секущей MM' , когда точка M' стремится к точке M . Пусть кривая L является графиком функции $y = f(x)$ (рис. 59). Проведем касательную MT к L в точке M . Координаты M : x и $f(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx :

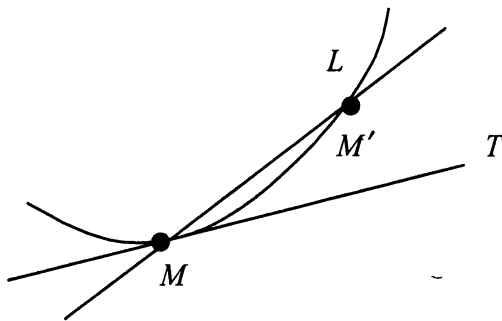


Рис. 58

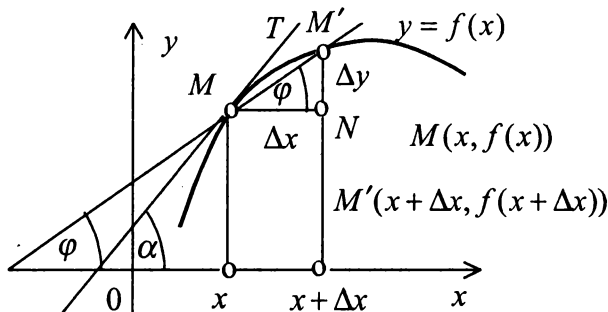


Рис. 59

функция $f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Мы попадаем в точку $M'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ на кривой. Если $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M' стремится слиться с точкой M . Угол φ наклона секущей MM'

стремится совпасть с углом наклона α касательной MT :

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad M' \rightarrow M \quad MM' \rightarrow MT \quad \varphi \rightarrow \alpha \quad \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha.$$

Из треугольника $MM'N$ видим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Поэтому для тангенса угла α наклона касательной получилось:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Зная тангенс угла наклона касательной, мы построим и саму касательную MT .

3. Ускорение (скорость изменения скорости движения).

Пусть в таком движении, как в задаче 1, нам в каждый момент t известно значение мгновенной скорости v этого движения. Таким образом, скорость v является функцией времени t : $v = F(t)$. Возьмем какой-то момент t и дадим

ГЛАВА II. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§1. Определение производной, ее геометрический смысл и физические интерпретации

1.1. Задачи, приводящие к понятию производной

1. Скорость движения.

Пусть некоторая точка M совершает движение по прямой. Будем считать, что в каждый момент времени t известен путь S , пройденный точкой от начального положения O за время t . Таким образом, путь S является функцией времени t (рис.56): $S = f(t)$.

Движение совершается с переменной скоростью: в каждый момент скорость, вообще говоря, имеет свое значение, отличное от ее значений в другие моменты. Задача состоит в том, чтобы вычислить скорость в произвольный момент времени t . Пусть (рис.57) в момент t значение пути, пройденного точкой (от какого-то первоначального положения), есть $S = f(t)$.

Дадим t некоторое приращение Δt . Точка M передвинется в новое положение M' , а пройденный до M' путь будет $f(t + \Delta t)$. За время Δt точка продвинулась на расстояние $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$. Отношение

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = v_{cp.}$$

есть средняя скорость движения за промежуток времени Δt (от момента t до $t + \Delta t$). Под истинной скоростью (мгновенной скоростью) в момент t понимают

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

2. Задача о касательной к кривой.

Дана некоторая линия L (рис.58). Касательной прямой MT к L в некоторой

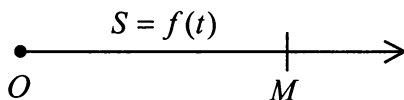


Рис.56

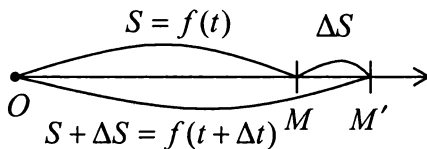


Рис. 57

свойства 1 и 2 могут перестать быть справедливыми для функции, непрерывной только на открытом интервале $(a;b)$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x$ на открытом интервале $(-1;1)$; она непрерывна на нем; ее наибольшее значение $y = 1$ должно было быть принято в правом конце (при $x = 1$), а наименьшее значение $y = -1$ в левом конце (при $x = -1$). Однако эти концы исключены из интервала $(-1;1)$ (рис.54).

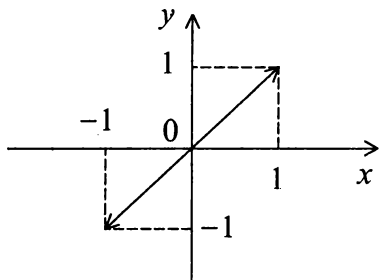


Рис. 54

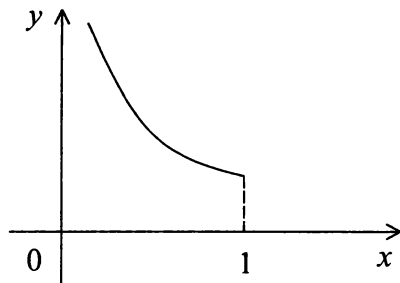


Рис. 55

Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0,1]$; эта функция

непрерывна. Однако $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ и функция не является ограниченной (рис.55).

Строгое доказательство свойств 1 – 3 весьма кропотливо и мы его опустим.

значение функции в которой $f(x_1) = M$ является наибольшим среди всех значений, принимаемых функцией на этом интервале, то есть $f(x_1) \geq f(x) \forall x \in [a; b]$. Точно так же существует хотя бы одна точка $x_2 \in [a; b]$, значение функции в которой $f(x_2) = m$ является наименьшим среди всех значений, принимаемых функцией на этом интервале, то есть $f(x_2) \leq f(x) \forall x \in [a; b]$.

На рис.52 точка, в которой достигается наибольшее значение, единственна, и точка, в которой достигается наименьшее значение, единственная. Кроме того, обе они лежат внутри интервала. Оба эти обстоятельства не существенны.

2. Если функция непрерывна на замкнутом интервале, то она на этом интервале ограничена.

Действительно, в силу свойства 1, функция достигает на этом интервале своего наибольшего и наименьшего значений M и m , поэтому для любого значения x из этого интервала выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

3. Если функция непрерывна на замкнутом интервале, то она принимает на нем любое значение, заключенное между ее наибольшим и наименьшим значениями на этом интервале (рис.53). Т.е. если $\mu : m \leq \mu \leq M$, то найдется хотя бы одно значение $x \in [a; b]$, для которого $f(x) = \mu$. Это свойство носит название

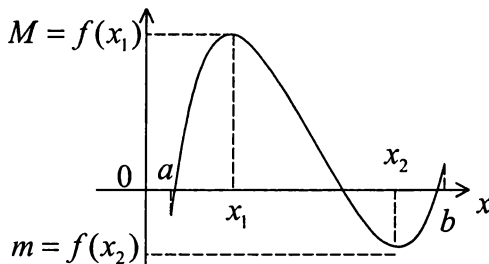


Рис. 52

теоремы о промежуточном значении. Скажем особо об одном частном случае этой теоремы: если непрерывная на замкнутом интервале функция принимает на его концах значения разных знаков, то внутри интервала обязательно найдется хотя бы одна точка, в которой эта функция обращается в нуль [иными словами, внутри интервала найдется хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$, см. рис.52].

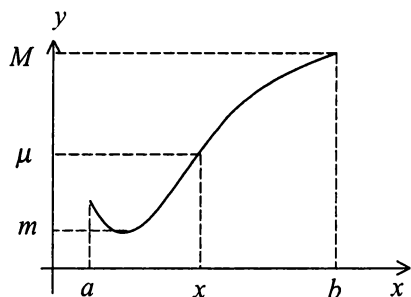


Рис. 53

Эти свойства представляются естественными и очевидными, т.к. геометрически графиком непрерывной функции будет сплошная линия, то есть

линия, которую можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Однако с подобными заключениями требуется большая осторожность. В частности,

Пример 3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ (рис.51)

$x_0 = 0$ – точка разрыва, так как хотя $f(x)$ определена в точке $x_0 = 0$ и существует

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ но } f(0) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

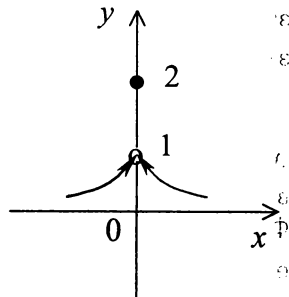


Рис. 51

Итак, условия непрерывности в точке x_0 нарушены, если либо $f(x)$ не определена в точке x_0 , либо $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, но не существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$; либо $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Разрыв в примере 3 легко устранить, переопределив в точке $x_0 = 0$ функцию: положим, что $f(0) = 1$ (первоначальное $f(0) = 2$ – явно неудачно) и таким изменением в одной единственной точке разрыв устраняется. Такого сорта разрыв, т.е. когда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует, но $\neq f(x_0)$ [или $f(x_0)$ не определено], называется *устраняемым*. Разрывы в примерах 1 и 2 – неустранимые.

7.5. Свойства функций, непрерывных на замкнутом интервале

Функция, непрерывная в каждой точке какого-либо интервала, называется *непрерывной на этом интервале*. В случае замкнутого интервала надо дополнительно пояснить, что мы будем понимать под непрерывностью в концах интервала. Дело в том, что до сих пор, говоря о непрерывности функции в точке, мы считали ее заданной в целой окрестности этой точки, в концевых точках интервала это требование нарушается.

Будем считать, что функция непрерывна в левом конце a интервала $[a; b]$, если $f(a) = f(a + 0)$, и непрерывна в правом конце b , если $f(b) = f(b - 0)$.

1. Если функция непрерывна на замкнутом интервале $[a; b]$, то она достигает на этом интервале своего наибольшего и наименьшего значений.

Это означает (рис.52), что существует такая точка $x_1 \in [a; b]$ (хотя бы одна),

7.3. Непрерывность элементарных функций

Читателю необходимо прежде всего вспомнить определение основных элементарных функций и элементарных функций.

Приведем теорему о непрерывности элементарных функций: *всякая элементарная функция непрерывна в любой точке, где она определена.*

Мы не будем подробно доказывать эту теорему – укажем лишь этапы ее доказательства. Прежде всего устанавливается справедливость теоремы для основных элементарных функций (так, например, теорема верна для функции $y = \sin x$: эта функция определена при всех x и при всех x непрерывна)

Точно так же функция x^2 – частный случай степенной функции – определена при всех x и при всех x непрерывна (пример из п.7.1). Затем теорема устанавливается в полном объеме на основании теоремы о непрерывности результатов арифметических действий и непрерывности сложной функции.

7.4. Точки разрыва функции

Если в точке x_0 нарушены условия непрерывности функции $f(x)$, то в этой точке функция терпит разрыв; сама такая точка называется точкой разрыва.

Будем считать, что $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 , но не обязательно в самой точке x_0 . Что значит, что в точке x_0 нарушены условия непрерывности? Согласно первому определению непрерывности, условия непрерывности в точке x_0 таковы: $f(x)$ определена при $x = x_0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; если хотя бы одно из них не выполняется, x_0 – точка разрыва.

Пример 1. $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $x_0 = -2$ – точка разрыва, так как в этой точке

функция не определена.

Пример 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (\text{рис.50}).$$

$x_0 = 0$ – точка разрыва, так как хотя $f(x)$

определена в точке $x_0 = 0$, но не существует

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

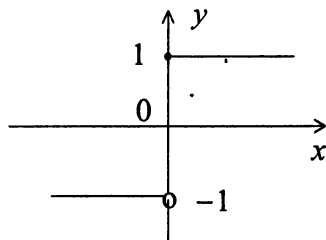


Рис. 50

$$\text{и } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (7\Delta x + (\Delta x)^2) = 0.$$

Сопоставим еще раз все определения непрерывности функции в точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$(\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0) \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

7.2 Свойства непрерывных функций

Сформулируем теорему о непрерывности результата арифметических действий над непрерывными функциями: *если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, разность $f(x) - \varphi(x)$, произведение*

$f(x) \cdot \varphi(x)$ и, если $\varphi(x_0) \neq 0$, частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывны в этой точке.

Доказательство этой теоремы немедленно следует из основных правил предельного перехода (см. §5).

Теорема о непрерывности сложной функции звучит так: *если промежуточный аргумент $u = \varphi(x)$ непрерывен в точке x_0 , а заданная функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .*

Действительно, в силу непрерывности $\varphi(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0. \quad \text{В силу непрерывности } f(u) \text{ в точке } u_0$$

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0). \quad \text{Поэтому } \lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) =$$

$$= f(u_0) = f(\varphi(x_0)) = y(x_0);$$

значит, $y(x)$ непрерывна в точке x_0 , и теорема доказана.

(то есть независимой переменной x) в точке x_0 $\Delta x = x - x_0$. Теперь в качестве переменной величины возьмем функцию. Приращение функции – это, согласно определению, разность между двумя различными значениями функции, то есть между значениями функции в двух различных точках (например, x и x_0 , рис.49):

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ – это приращение функции соответствует взятому приращению

аргумента $\Delta x = x - x_0$. Таким образом, чтобы получить приращение функции, надо придать приращение ее аргументу. Приращение функции зависит от точки x_0 ; написанное нами приращение Δf является приращением функции в точке x_0 .

Теперь дадим второе определение непрерывности функции в точке.

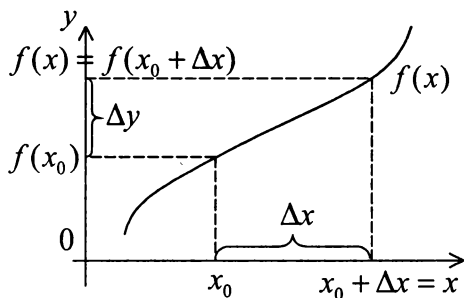


Рис. 49

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности, и бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy , т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{или} \quad \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \quad (20)$$

Оба определения непрерывности функции в точке эквивалентны.

Пример. С помощью второго определения непрерывности докажем, что $f(x) = x^2 + x - 2$ непрерывна в точке $x_0 = 3$. Придадим точке $x_0 = 3$ приращение Δx ; этому приращению аргумента будет соответствовать приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(3 + \Delta x) - f(3)$;

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 + 3 - 2 = 10; \quad f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2 + (3 + \Delta x) - 2 = \\ &= 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 + \Delta x + 2 = 10 + 7\Delta x + (\Delta x)^2; \end{aligned}$$

отсюда $\Delta y = (10 + 7\Delta x + (\Delta x)^2) - 10 = 7\Delta x + (\Delta x)^2$

Отметим сразу же, что здесь не нужна оговорка $x \neq x_0$ (или, что то же, $0 < |x - x_0|$), так как при $x = x_0$ неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

выполняется.

Вспомнив, что наличие $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ связано с равенством левого и правого пределов функции в точке x_0 (§5 п.5.5) мы можем (18) переписать в более подробном виде:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \quad (19)$$

Из определения сразу же следует, что в точке непрерывности можно менять местами символы функции и предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$. В самом деле, если x_0 – точка непрерывности функции $f(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

Это важное обстоятельство используется при вычислении пределов, и, честно говоря, мы этим уже пользовались (например, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$).

Пример. Проверим непрерывность функции $f(x) = x^2$ в произвольной точке x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^2 = x_0^2 = f(x_0)$. Мы воспользовались теоремой о пределе степени.

Теперь перейдем ко второму определению непрерывности функции в точке. Но прежде чем его дать, определим еще одно понятие – это понятие приращения переменной величины.

Приращением переменной величины будем называть разность между двумя ее различными значениями. Пусть в начальный момент (начальный для нашего рассмотрения) переменная величина имела значение x_0 , а затем в процессе своего изменения приняла какое-то значение x , разность $x - x_0$ между ее новым значением x и старым значением x_0 – приращение $\Delta x = x - x_0$ этой переменной величины.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Зафиксируем какую-либо точку x_0 , лежащую внутри ее области определения; приращение аргумента этой функции

$$5. 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$10. \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$$

Замечание. В этой таблице x обозначает какую-либо бесконечно малую величину. Например, вторую строку таблицы следует понимать так: тангенс эквивалентен своему аргументу, когда аргумент бесконечно мал, т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{x-2}{4} \sim \frac{x-2}{4} \text{ при } x \rightarrow 2.$$

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x \cdot \ln(1 + \sin 7x)}{(e^{\operatorname{arctg} 3x} - 1) \cdot \operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \sin 7x}{\operatorname{arctg} 3x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{7x}{3x} = \frac{35}{6}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x + 1) = 2.$$

§7. Непрерывные функции

7.1. Два определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности, существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и этот предел равен значению функции в точке x_0 , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (18)$$

Можно это определение подробно расшифровать на языке $\varepsilon - \delta$, оно будет почти таким же, как определение предела функции в точке, только вместо числа a , никак в общем случае не связанного со значением функции в предельной точке x_0 , в нем будет фигурировать самое естественное число из всех, которые могут встретиться в этой ситуации: это число $f(x_0)$.

Итак, функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3 =$$

$$= T_2(x) + R_2(x). \quad (12)$$

Для удобства записей значки 2 в обозначениях опустим. Таким образом,

$$T_2(x) = T(x), R_2(x) = R(x).$$

Непосредственным дифференцированием находим:

$$T(x_0) = f(x_0), T'(x_0) = f'(x_0), T''(x_0) = f''(x_0), T'''(x_0) = 0.$$

Поэтому для функции

$$R(x) = f(x) - T(x)$$

будем иметь:

$$R(x_0) = 0, R'(x_0) = 0, R''(x_0) = 0, R'''(x) = f'''(x). \quad (13)$$

Сравним $R(x)$ с функцией $\varphi(x) = (x - x_0)^3$, для которой

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \varphi''(x_0) = 0, \varphi'''(x) = 3!. \quad (14)$$

Применяем несколько раз теорему Коши, считая для определенности $x > x_0$:

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)} = \frac{R(x) - R(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{R'(c_1)}{\varphi'(c_1)} = \frac{R'(c_1) - R'(x_0)}{\varphi'(c_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{R''(c_2)}{\varphi''(c_2)} =$$

$$= \frac{R''(c_2) - R''(x_0)}{\varphi''(c_2) - \varphi''(x_0)} = \frac{R'''(c)}{\varphi'''(c)} = \frac{f'''(c)}{3!}.$$

Мы несколько раз обращались к (13) и (14); здесь $x_0 < c < c_2 < c_1 < x$.

Вспоминая, что такое $\varphi(x)$, видим, что

$$\frac{R(x)}{(x - x_0)^3} = \frac{f'''(c)}{3!}, R(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Мы доказали (12). При произвольном n рассуждения ведутся в том же порядке.

9.2. Пример применения. Второй достаточный признак экстремума

Пусть в точке x_0 и некоторой ее окрестности функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0,$$

то x_0 – точка минимума. Если же

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0,$$

то x_0 – точка максимума.

Доказательство.

Формула Тейлора с $n = 1$ дает

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (f'(x_0) = 0!), \quad (15)$$

где c лежит между x и x_0 . Если точка x достаточно близка к точке x_0 , то знак $f''(c)$ такой же, как и у $f''(x_0)$ – в силу непрерывности $f''(x)$. (Непрерывная функция в окрестности точки x_0 сохраняет тот знак, который имело ее значение в x_0 ; конечно, это верно для достаточно тесной окрестности x_0). Поэтому $f''(c) > 0$, если $f''(x_0) > 0$, и из (15) следует, что $f(x) > f(x_0)$, т.е. в x_0 – минимум. Если же $f''(x_0) < 0$, то $f''(c) < 0$, и из (15) следует, что $f(x) < f(x_0)$, а значит, в x_0 – максимум.

ГЛАВА IV. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Функции двух переменных, непрерывность

1.1. Функции двух переменных

Пусть на плоскости xOy имеется некоторое множество точек D . Пусть каждой точке $P \in D$ поставлено в соответствие по некоторому правилу число $z: P \rightarrow z$. Тогда говорят, что на множестве D задана функция $z = f(P)$. Аргументом этой функции служит геометрический объект: точка P , пробегающая множество D , а значением – величина (переменная) z . Однако положение каждой точки P определяется парой ее координат x и $y: P(x, y)$. Координаты этой точки независимы друг от друга и поэтому можно сказать, что задана функция $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y .

Итак, переменная величина z называется **функцией двух независимых переменных** x и $y: z = f(x, y)$ (или **функцией точки** $P(x, y): z = f(P)$), заданной на некотором множестве D , если по какому-то закону или правилу каждой паре $(x, y) \in D$ (каждой точке $P \in D$) соответствует определенное значение z . Множество D называется областью определения функции. Множество значений z , принимаемых функцией $z = f(P)$, когда P пробегает множество D , составляет область значений функции.

Пример. Пусть x и y – стороны прямоугольника, z – его площадь. Тогда $z = xy$ – функция двух независимых переменных x и y , заданная на множестве $D = \{(x, y): x > 0, y > 0\}$ (рассматриваем только не вырожденные прямоугольники) – это первый квадрант плоскости xOy . Множество значений z будет интервал $(0, +\infty)$.

Здесь область определения функции вытекала из конкретного смысла величин x и y . Закон же соответствия $z = xy$ никаких ограничений не диктует и если бы мы не знали конкретного смысла x и y в этой задаче, то областью определения надо было считать всю плоскость xOy .

1.2. Области на плоскости

Для функций $y = f(x)$ одной переменной в качестве области определения чаще всего выступали интервалы. Как обстоит дело для функций нескольких переменных? Назовем δ -окрестностью точки (x_0, y_0) множество точек внутри круга радиуса δ ($\delta > 0$) с центром в (x_0, y_0) (рис. 87). (Окружность круга к окрестности не относим).

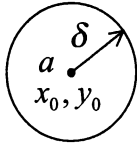


Рис. 87

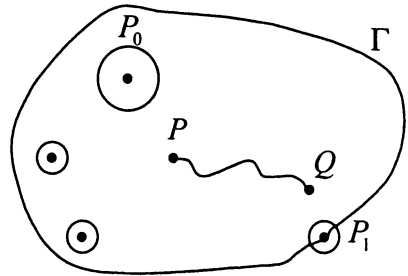


Рис. 88

Точка (x_0, y_0) называется *внутренней* для множества D , если она принадлежит D вместе с некоторой своей δ -окрестностью. **Открытой областью** назовем такое множество, что 1) *любые его точки – внутренние* и 2) *любые две его точки можно соединить непрерывной линией, лежащей в D* (рис.88).

Заметим, что радиусы δ -окрестностей различных точек D различны. Чаще всего область – это часть плоскости, лежащая внутри замкнутого контура Γ . Точка P_1 называется **граничной** для области D , если в любой δ -окрестности этой точки есть как точки D , так и точки, не принадлежащие D . Совокупность всех граничных точек составляет *границу* области (на рис.88 это контур Γ). Если к открытой области D присоединить ее границу Γ , то получается **замкнутая область** $\bar{D}$.

В качестве области определения для функций двух переменных чаще всего выступают открытые или замкнутые области. Область D – *ограниченная*, если ее можно поместить в какой-нибудь круг. В примере из п.1.1 – неограниченная область.

1.3. Геометрическое изображение функции двух переменных

Пусть в области D задана функция $z = f(P)$. Поставим в каждой точке $P \in D$ "столбик" высотой $z = f(P)$ (откладываем z по оси OZ – оси аппликат). В результате над областью D "натянется крыша" – поверхность, опирающаяся на все построенные "столбики" (рис.89).

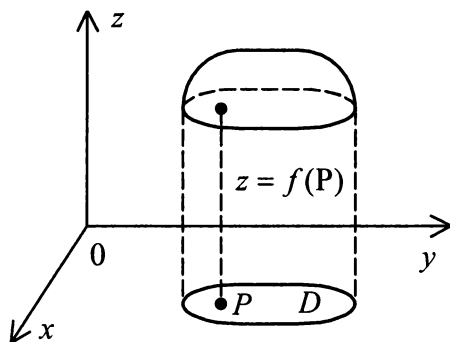


Рис. 89

Конечно, некоторые части этой "крыши" окажутся не над D , а под D , если в соответствующих точках у функции отрицательные значения. Эта *поверхность* и есть *геометрическое изображение функции* $z = f(P) = f(x, y)$. Уравнение $z = f(x, y)$, связывающее три координаты (x, y, z) точек поверхности, – *уравнение этой поверхности*.

Пример. $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения (рис.90).

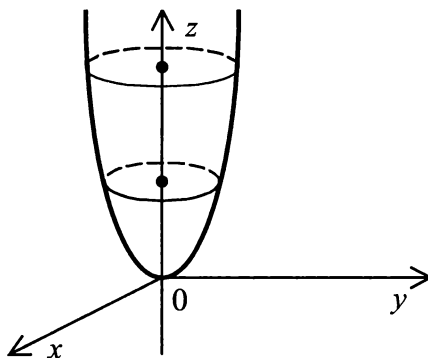


Рис. 90

1.4. Линии уровня

Возьмем какое-либо значение $z = C$ из области значений функции $z = f(x, y)$. Совокупность точек на плоскости xOy , в которых принимается это значение, будет называться **множеством уровня** (уровня C). Чаще всего это линия, **линия уровня** C . Получается эта линия как проекция на плоскость xOy линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с горизонтальной плоскостью $z = C$ (рис.91).

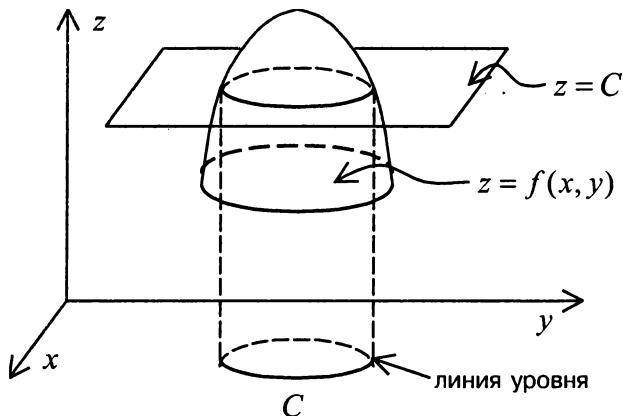


Рис. 91

Для поверхности $z = x^2 + y^2$ из предыдущего примера линиями уровня будут окружности $x^2 + y^2 = C, C \geq 0$. При $C = 0$ окружность выродится в точку $(0,0)$. Нанеся на плоскость xOy достаточно частую сетку линий уровня, у каждой из которых проставлен ее уровень C , получим достаточно ясное представление о рельефе поверхности $z = f(x, y)$. Этим часто пользуются в топографии: здесь, конечно, уравнение поверхности (холмов, впадин и т.п.) отсутствует, но из непосредственных измерений строится сетка линий уровня изучаемого рельефа и эта сетка дает плоское изображение пространственного рельефа данной местности.

1.5. Предел и непрерывность функции двух переменных

Пусть функция $f(P) = f(x, y)$ определена в некоторой области D , а точка P_0 – либо точка этой области, либо граничная для D ; в самой точке P_0 функция может быть и не определена (если D – открытая область и P_0 лежит на ее границе). В соответствии с общими взглядами на предел, развитыми в гл. I, приходим к такому определению: число a есть **предел функции** $f(P)$ при $P \rightarrow P_0$ (или в точке P_0), если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что во всех точках P (кроме, быть может, самой точки P_0) области D , попавших в δ -окрестность точки P_0 , выполняется неравенство

$$|f(P) - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

То же самое в символической записи:

$$\begin{aligned} a = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P \in D, 0 < r(P, P_0) < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(P) - a| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r(P, P_0)$ – расстояние от P до P_0 .

Аналогичным образом можно определить, что означает $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \infty$.

Если теперь $f(P)$ определена в замкнутой области $\overline{D}$, то она *непрерывна* в точке $P_0 \in \overline{D}$ (неважно, внутренней или граничной), если

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \quad (3)$$

Точки, в которых условие непрерывности (3) нарушено, называются точками разрыва. Для функций двух переменных точки разрыва могут заполнять целые линии.

Примеры.

1. $z = \frac{x+y}{x-y}$. Функция определена во всех точках (x, y) , у которых $x \neq y$.

На прямой $y = x$ она не определена и поэтому эта прямая состоит из точек разрыва функции.

2. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Функция определена всюду, кроме точки $(0,0)$. Покажем,

что $\lim_{P \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не существует. Действительно, если $P(x,0)$ движется по

оси абсцисс, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Если же $P(0,y) \rightarrow (0,0)$ по оси

ординат, то $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$. Таким образом, ни для какого a угодить условию

(1) невозможно.

3. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена всюду в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leq 1$ и, как можно проверить, опираясь на обычные свойства предела из гл.1, непрерывна в этом круге.

1.6. Свойства непрерывных функций

Вполне аналогично свойствам непрерывных на замкнутом интервале функций справедливы утверждения: если $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой, ограниченной области $\bar{D}$, то она: 1) достигает там своего наибольшего и наименьшего значений; 2) ограничена; 3) принимает все значения, промежуточные между наименьшим и наибольшим.

1.7. Приращения независимых переменных и приращение функции

Пусть $f(x,y)$ задана в области D и $P_0(x_0, y_0)$ – внутренняя точка области D . Дадим аргументам x и y приращения Δx и Δy – произвольные, такие, однако, чтобы точка $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ еще не выпала из D . Тогда

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (4)$$

– **полное приращение функции**.

Геометрически Δz дает изменение аппликаты точки на поверхности $z = f(x,y)$ при переходе от позиции $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к позиции $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$, т.е. разность длин “столбиков”,

поставленных соответственно в точках $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и (x_0, y_0) . Условие непрерывности $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) можно записать и так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0. \quad (5)$$

Если бы мы дали приращение Δx только переменному x или только приращение Δy переменному y , то возникли бы *частные приращения* функции:

$$\begin{aligned} \Delta_x z &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0); \\ \Delta_y z &= f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Эти приращения – **частные** (по x и по y соответственно); теперь оправдано и название “полное” для (4).

§2. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

2.1. Частные производные

Частными производными в точке (x_0, y_0) по x и y называются соответственно

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \text{ и } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \quad (7)$$

(Конечно, если эти пределы существуют). Обозначаются они

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ или } z'_x, z'_y \text{ или } f'_x, f'_y, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad (8)$$

и, если необходимо, показывается точка x_0, y_0 , где вычислены частные

производные: $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$ или $z'_y(x_0, y_0)$ или $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0$ – например. Символы

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ (с круглыми ∂ !) – не настоящие дроби в отличие от $\frac{dy}{dx}$, а лишь стилизованные обозначения пределов.

Чтобы *вычислить частную производную* по какому-то из переменных, надо действовать по обычным правилам дифференцирования, считая *другое переменное неизменным*, постоянным.

Пример 1. $z = \ln(x^3 - y^3)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 \cdot 2x}{x^2 - y^3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1(-3y^2)}{x^2 - y^3}$$

Пример 2. $z = \sqrt{\cos(x + y^2)}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\sin(x + y^2)}{2\sqrt{\cos(x + y^2)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\sin(x + y^2) \cdot 2y}{2\sqrt{\cos(x + y^2)}}.$$

2.2. Геометрический смысл частных производных

Проведем через точку (x_0, y_0) плоскость $x = x_0$, параллельную плоскости $yo'z'$. На рис.92 это плоскость $y'o'z'$.

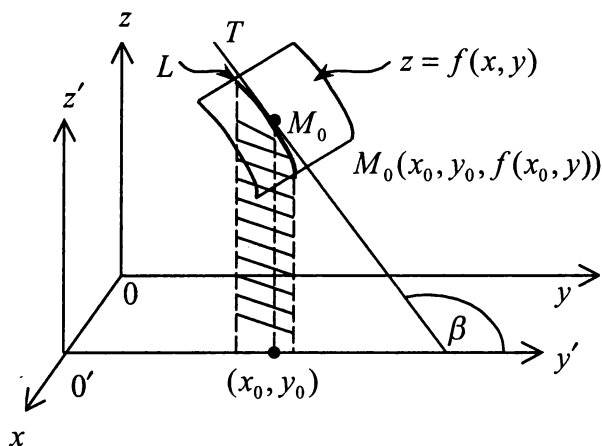


Рис. 92

Из поверхности $z = f(x, y)$ эта плоскость вырежет кривую L . На L получится точка $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ – конец “столбика”, восстановленного из (x_0, y_0) . Проведем через M_0 касательную прямую к линии L (в плоскости сечения). Тангенс угла наклона β касательной к оси $o'y'$ (или, что то же, к оси oy) и есть частная производная (по y) (рис.92):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = \operatorname{tg} \beta. \quad (9)$$

Это немедленно вытекает из геометрического смысла обычной производной. Аналогичным образом истолковывается $\frac{\partial z}{\partial x}$. Касательная M_0T задается в пространстве системой двух уравнений первой степени:

$$x = x_0, z - z_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0). \quad (10)$$

Совершенно аналогичным образом, если провести сечение плоскостью $y = y_0$, то образуется касательная прямая в этой плоскости с уравнениями

$$y = y_0, z - z_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0). \quad (10')$$

2.3. Касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$

Две касательные прямые, построенные в п.2.2, определяют плоскость. Эта плоскость называется *касательной плоскостью к поверхности* в т. M_0 . Поскольку она проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$, ее уравнение можно записать так:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0). \quad (11)$$

(Проверьте, что координаты M_0 удовлетворяют (11)).

В сечении этой плоскости плоскостью $x = x_0$ образуется построенная нами касательная прямая M_0T , для которой – см. (10)

$$x - x_0 = 0, z - z_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0). \quad (12)$$

Но из (11) следует, что

$$z - z_0 = B(y - y_0). \quad (13)$$

Сравнивая (12) и (13), видим, что $B = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}$; точно так же находится и

$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$. Подставляя все это в (11), получаем:

$$z - z_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) \quad (14)$$

– уравнение касательной плоскости.

2.4. Дифференцируемость функции. Полный дифференциал

Возьмем полное приращение функции $f(x, y)$ при перемещении из начальной точки $P_0(x_0, y_0)$ в какую-то точку $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Через $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ обозначим расстояние между P_0 и P . Если приращению Δz при б.м. Δx и Δy можно придать вид:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(r), \quad (15)$$

где A и B – постоянные числа, а $o(r)$ (о малое) – б.м. высшего порядка по сравнению с r , то функцию $f(x, y)$ называют дифференцируемой в точке (x_0, y_0) . Из (15) немедленно следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0,$$

т.е. дифференцируемая функция непрерывна. Аналогичное утверждение имело место и для функций одного переменного (гл. II, §2).

И так же, как там, обратное утверждение неверно: из непрерывности дифференцируемость не вытекает.

Вычислим коэффициенты A и B . Положим $\Delta y = 0$. Тогда

$r = \sqrt{\Delta x^2} = |\Delta x|$. Приращение Δz станет частным приращением $\Delta_x z$:

$$\Delta z = \Delta_x z = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

И мы имеем:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}; \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} - \text{б.м.},$$

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \text{б.м.}, A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0}$$

Точно так же получится, что $B = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0}$ [надо взять $\Delta x = 0$ в формуле

(15)]. Итак, если $f(x, y)$ дифференцируема в x_0, y_0 , то она обладает обеими частными производными в этой точке и

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \Delta y + o(r). \quad (16)$$

Выражение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \Delta y \quad (17)$$

называется **полным дифференциалом функции** в точке (x_0, y_0) . Оно линейно относительно произвольных приращений Δx и Δy независимых переменных и отличается от Δz на б.м. высшего порядка относительно r (и, значит, относительно Δx и Δy). Поэтому можно сказать, что дифференциал есть главная часть приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных. На приближенном равенстве

$$\Delta z \approx dz,$$

которое тем точнее, чем меньше Δx и Δy , основано применение дифференциала в приближенных вычислениях (как и в случае функций одного переменного).

Если возьмем функцию $z = x$, то будем иметь

$$dz = dx = 1\Delta x, \text{ т.к. } \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, дифференциал независимого переменного x равен произвольному приращению x :

$$dx = \Delta x.$$

Точно таким же образом, рассмотрев функцию $z = y$, найдем, что $dy = \Delta y$ и для дифференциала dz формулу (17) можно переписать так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (18)$$

Мы опустили явное указание точки (x_0, y_0) .

В случае функции одного переменного наличие производной и наличие дифференциала имело место одновременно и каждый из двух этих фактов влек название функции дифференцируемой. Для функции двух переменных из наличия дифференциала (именно в этом случае мы назвали функцию дифференцируемой) вытекает наличие частных производных. Однако из наличия частных производных не следует обязательно, как можно показать, дифференцируемости, т.е. формально выражение (18) написать можно, но оно не обязано отличаться от Δz на $o(r)$, как требуется в (16).

2.5. Геометрический смысл полного дифференциала

Напишем уравнение касательной плоскости (14) в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и сравним с (17). Если положим, как всегда, $x - x_0 = \Delta x, y - y_0 = \Delta y$, то из (14) получаем

$$z - z_0 = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta y,$$

а из (17), что это есть dz . Таким образом $dz = z - z_0$, т.е. *дифференциал есть приращение аппликаты точки,двигающейся по касательной плоскости, проведенной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, и вызванное приращениями Δx и Δy независимых переменных.* (В то время как Δz – приращение аппликаты точки,двигающейся по поверхности, и это приращение вызвано приращениями Δx и Δy аргументов).

Обозначим через z_Π аппликату текущей точки на поверхности (рис.93), а через z_K – аппликату соответствующей ей (т.е. с такими же x и y) точки на касательной плоскости.

Тогда $z_\Pi - z_0 = \Delta z, z_K - z_0 = dz$ и из (16) получаем, что

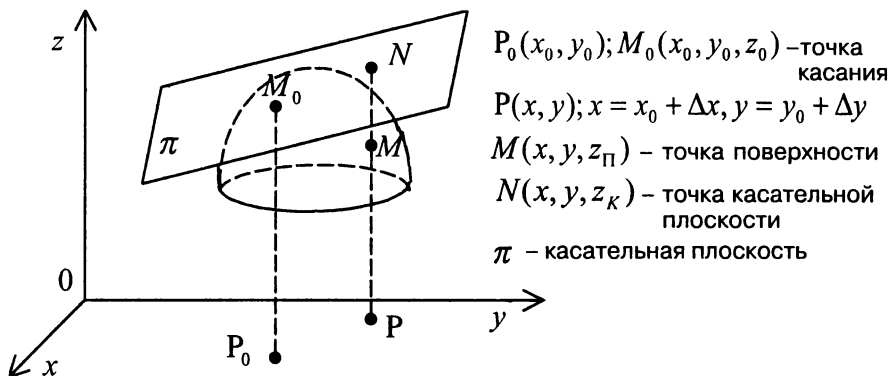


Рис. 93

$z_\pi - z_K = \Delta z - dz = o(r)$ – б.м. высшего порядка.

Этот факт означает теснейшее примыкание касательной плоскости к поверхности. Таким образом, в бесконечно малом можно “кривую” поверхность весьма точно заменить плоским “куском” – куском касательной плоскости.

2.6. Дифференцирование сложной функции

Пусть задана функция

$$z = f(u, v), \quad (19)$$

но ее аргументы u и v сами являются функциями независимых переменных x и y :

$$z = f(u, v), \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y). \quad (20)$$

Тогда

$$z = f(u, v) = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \quad (21)$$

– сложная функция переменных x и y . Предполагаем все функции (20) дифференцируемыми. Дадим x б.м. приращение Δx . Тогда u, v, z получат соответствующие приращения $\Delta_x u, \Delta_x v, \Delta_x z$. Имеем

$$\Delta_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \alpha, \quad \Delta_x v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \beta, \quad (22)$$

где α и β – б.м. высшего порядка относительно Δx . Приращения u и v вызовут приращение $\Delta_x z$ функции (19):

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \Delta_x v + \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \eta. \quad (23)$$

В (23) γ – б.м. высшего порядка относительно $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, а η – как нетрудно показать – б.м. высшего порядка относительно Δx .

Из (23) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично выводится формула для $\frac{\partial z}{\partial y}$. Выпишем эти формулы для дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (24)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пример. $z = e^{xy} \cos(x - y)$. Положим $xy = u, x - y = v$. Тогда $z = e^u \cos v$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \cdot \cos v \cdot y - e^u \cdot \sin v \cdot 1 =$$

$$= e^{xy} (\cos(x - y) \cdot y - \sin(x - y));$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \cdot \cos v \cdot x - e^u \cdot \sin v \cdot (-1) =$$

$$= e^{xy} (\cos(x - y) \cdot x + \sin(x - y)).$$

2.7. Инвариантность формы записи дифференциала

Если бы в (19) u и v были независимыми переменными, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (25)$$

Однако независимыми переменными служат x и y и тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (26)$$

Из (20) получаем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (27)$$

Используя (24) и (27), находим из (26)

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv, \end{aligned}$$

т.е. форма полного дифференциала (25) не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными или функциями каких-то других аргументов (ср. гл. II, §6, п.3).

2.8. Производные высших порядков

Возьмем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и найдем ее частные производные по x и по y . Получим

частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (сначала дифференцируем

по x , потом по y) (читается “дэ два зэт по дэ икс в квадрате”, “дэ два зэт по дэ икс, по дэ у”). Точно так же образуются

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Далее, дифференцируя производные второго порядка, можно образовывать производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \text{ (сначала два раза по } x \text{, затем по } y \text{), } \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}. \quad \text{Другие обозначения} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = z''_{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = z''_{y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = z'''_{xyx} \text{ и т.п.}$$

Конечно, все это в предположении, что функция $f(x, y)$ такова, что указанные дифференцирования действительно возможны.

Оказывается, что *результат повторного дифференцирования, если рассматриваемые производные непрерывны, не зависит от порядка, в котором дифференцирование выполнялось, а только от количества сделанных по каждой из переменных дифференцирований*, т.е.

$$z''_{xy} = z''_{yx}, \quad z'''_{x^2y} = z'''_{yx^2} \text{ и т.п.}$$

Пример. $z = x^5 y^3 - 4xy$; $z'_x = 5x^4 y^3 - 4y$; $z'_y = 3x^5 y^2 - 4x$; *

$$z''_{x^2} = 20x^3 y^3; z''_{xy} = 15x^4 y^2 - 4; z''_{y^2} = 10x^5 y; z''_{yx} = 15x^4 y^2 - 4.$$

Оказалось, $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2.9. Экстремумы функций двух переменных

Определение точек *максимума и минимума* для функции двух переменных дословно такое же, как для функций одного переменного (см. §3 гл.III). Следует лишь помнить, что теперь точка – это (x_0, y_0) (а не x_0), а δ -окрестность – круг радиуса δ с центром в (x_0, y_0) , а не интервал, содержащий x_0 . Поэтому мы воздержимся от повтора этих определений.

2.10. Необходимый признак экстремума

Если в точке экстремума (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет частные производные, то они необходимо равны нулю:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = 0. \quad (28)$$

Доказательство. Рассмотрим сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$. На поверхности вырежется линия L – график функции одной переменной $y: z = f(x_0, y)$. Функция от $y: f(x_0, y)$ имеет в точке y_0 , т.е. в (x_0, y_0) , экстремум того же характера, что и функция двух переменных $f(x, y)$.

Если же выполнены условия (28), но $\Delta < 0$, то экстремума нет. В случае, когда $\Delta = 0$, экстремум может быть, а может и не быть – здесь наш признак “молчит”.

Доказательство опустим.

2.12. Наибольшее и наименьшее значения в области

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области, существуют. Где их искать? Среди критических точек внутри области, но они могут также оказаться и среди граничных точек.

Пример. Найти наибольшее значение функции $z = (1 - x - y)xy$ в области D :

$x \geq 0, y \geq 0, 2 - x - y \geq 0$ (рис.95).

Область ограничена осями координат и прямой $x + y = 2$; она замкнута.

Стационарные точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -xy + (1 - x - y)y = -2xy + y - y^2 = 0$$

$$2x + y = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -xy + (1 - x - y)x = -2xy + x - x^2 = 0$$

$$x + 2y = 1.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad x = y = \frac{1}{3} \text{ – стационарная точка.}$$

Исследование на границе: $x = 0, z = 0$; $y = 0, z = 0$; $x + y = 2$, $z = (1 - x - y)xy = -1 \cdot xy < 0$. Таким образом, на границе z либо равно 0, либо принимает отрицательные значения. Значит, наибольшее значение – в

стационарной точке и оно равно $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

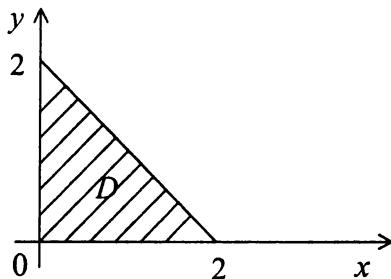


Рис. 95

§3. Функции трех и более переменных. Скалярное поле

3.1. Функция трех переменных

Пусть D – некоторое множество точек в трехмерном пространстве. Если каждой точке $P \in D$ поставлено в соответствие по некоторому правилу число $u: P \rightarrow u$, то на множестве D задана функция $u = f(P)$. Аргумент этой функции – точка P , значение – переменная величина u . Поскольку каждая точка P определяется тремя координатами $x, y, z: P(x, y, z)$, то u есть **функция трех независимых переменных**, заданная на множестве D :

$$u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D, \quad (30)$$

где D – область определения функции f .

Пример. u – объем параллелепипеда со сторонами $x, y, z: u = xyz$. Функция задана на множестве точек (x, y, z) , у которых $u = x > 0, y > 0, z > 0$. Область определения D этой функции – первый октант пространства.

3.2. Внутренние и граничные точки

Определяются дословно так же, как в случае двух переменных, но теперь δ -окрестность точки x_0, y_0, z_0 – это внутренность шара радиуса δ с центром (x_0, y_0, z_0) .

3.3. Поверхности уровня

Если задана функция $u = f(x, y, z)$, то множество точек, в которых она принимает одно и то же значение C – множество уровня (уровня C); обычно это поверхность. Ее уравнение:

$$f(x, y, z) = C. \quad (31)$$

Давая C различные значения, получаем семейство поверхностей уровня, дающие определенное представление о некоторых свойствах функции.

Пример. $u = x^2 + y^2 + z^2$. Поверхности уровня $x^2 + y^2 + z^2 = C, C \geq 0$ – это сферы радиуса $\sqrt{C}$. При $C = 0$ сфера вырождается в точку – начало координат.

3.4. Функции любого числа переменных

Задано некоторое множество D "объектов" P , каждый из которых является каким-то набором из n чисел: $P(x_1, \dots, x_n)$. такие объекты трактуются как точки n -мерного пространства R^n (R^3 – обычное трехмерное пространство, R^2 – плоскость, $R^1 = R$ – числовая ось). В R^n вводится расстояние между любыми двумя точками $P_1(x_1^1, \dots, x_n^1)$ и $P_2(x_1^2, \dots, x_n^2)$: $r(P_1, P_2) = \sqrt{\sum_1^n (x_i^1 - x_i^2)^2}$.

Определяется **δ -окрестность точки P_0** – это множество всех точек P , для которых $r(P, P_0) < \delta$. После этого понятия внутренней или граничной точки множества D , открытой и замкнутой области описываются дословно так же, как в R^2 и R^3 .

Если каждой точке P из множества D , лежащего в R^n , поставлено в соответствие по некоторому правилу число u : $P \rightarrow u$, то на множестве D задана функция точки P : $u = f(P)$. Поскольку каждая точка определяется набором своих координат, то $u = f(x_1, \dots, x_n)$ – **функция n независимых переменных**. Множество D – область определения этой функции.

Пример. $u = \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$; D состоит из точек P , для которых сумма координат ≥ 0 .

3.5. Предел, непрерывность, частные производные для функции нескольких переменных

Предел, непрерывность, частные производные для функции нескольких переменных определяются так же, как в случае двух переменных. Так, если

$u = f(x, y, z)$, то $\frac{\partial u}{\partial x}$ – производная, получающаяся при дифференцировании u по x , когда y и z считаются постоянными. Правила дифференцирования сложной функции тоже сохраняются.

3.6. Касательная прямая и нормаль к графику неявной функции

Пусть линия L задана уравнением $f(x, y) = 0$, не решенным относительно y . Найдем y' для неявной функции, определяемой этим уравнением. Дифференцируем по x , помня, что y есть функция от x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0; \quad y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Уравнение касательной прямой в точке $P_0 \in L$:

$$y - y_0 = -\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_0 (x - x_0); \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = 0. \quad (32)$$

Уравнение нормали:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (y - y_0) = 0. \quad (32')$$

3.7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявным уравнением

Пусть уравнение поверхности будет $f(x, y, z) = 0$. Это уравнение определяет “столбик”. z как неявную функцию от двух переменных x и y . Рассуждая как в предыдущем подразделе и отправляясь от уравнения касательной плоскости (14), найдем, что теперь касательная плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет иметь уравнение:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \quad (33)$$

Прямая, проведенная через точку M_0 нашей поверхности перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности и имеет уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}. \quad (33')$$

3.8. Скалярное поле

Пусть D – некоторая область на плоскости или в пространстве. Если в ней задана функция $u = f(x, y)$ (D – на плоскости) или $u = f(x, y, z)$ (D – пространственная область), то говорят еще, что в области D задано (наведено) скалярное поле. Например, u – температура в точках D (поле температур) или u – давление жидкости или газа в точках сосуда D (поле давлений). При такой трактовке линии уровня (плоский случай) или поверхности уровня (пространственное поле) функции u приобретают важный физический смысл. Для поля температур – это **изотермы**: линии (поверхности) одинаковой температуры, для поля давлений – **изобары**: линии (поверхности), на которых давление одинаково.

3.9. Производная по направлению

При изучении скалярного поля бывает важным иметь информацию о скорости изменения величины поля в том или ином направлении. Это приводит к понятию производной по направлению. Рассмотрим случай плоского поля (рис. 96).

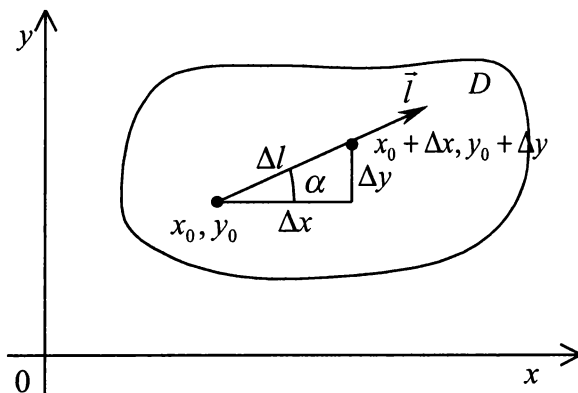


Рис. 96

В области D задано поле величины $u = f(x, y)$. Надо определить в данной точке $P_0(x_0, y_0) \in D$ скорость изменения поля в заданном направлении $\vec{l}$ (рис.96). Направление характеризуется вектором, составляющим угол α с осью Ox . Переместимся из точки (x_0, y_0) в направлении вектора $\vec{l}$ на величину Δl . Попадаем в точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где (см. рис.96) $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \sin \alpha$. Изменение функции u на пути Δl есть

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(\Delta l)$$

[считаем функцию дифференцируемой, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ вычислены в начальной точке (x_0, y_0)].

Средняя скорость изменения u на пути Δl будет $\frac{\Delta u}{\Delta l}$, а скорость в точке

P_0 :

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{o(\Delta l)}{\Delta l} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha. \quad (34)$$

Предел в (34) называется **производной по направлению l** и дает *скорость изменения функции в этом направлении*. Эта производная обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha. \quad (35)$$

Теперь мы можем трактовать частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ как производные по направлениям (положительным!) осей Ox и Oy . Производная в отрицательном направлении оси Ox , например, будет $-\frac{\partial u}{\partial x}$

($\alpha = \pi, \cos \pi = -1, \sin \pi = 0$).

В случае пространственного поля $u = f(x, y, z)$ вектор направления $\vec{l}$ характеризуется углами α, β, γ , составленными им с осями координат. Рассуждая как выше, мы найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (36)$$

3.10. Градиент скалярного поля

В каждой точке (x, y) области D , где задана функция $u = f(x, y)$ (скалярное поле), определим вектор $\vec{g}$, координатами которого будут частные производные u , вычисленные в этой точке:

$$\vec{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \quad \vec{i}, \vec{j} - \text{орты осей}. \quad (37)$$

Вектор $\vec{g}$ называется **градиентом функции u** . В каждой точке D значение градиента, вообще говоря, свое и мы получаем в D поле новой природы – векторное поле градиента функции u (рис.97).

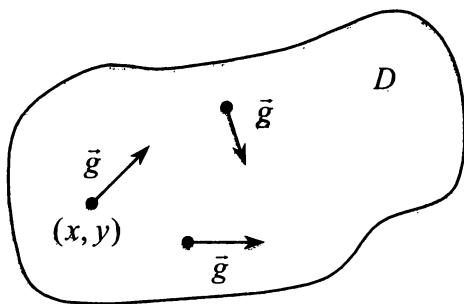


Рис. 97

Градиент обладает рядом полезных свойств:

1) производная по направлению есть проекция градиента на это направление. (Конечно, речь идет о производной и градиенте для одной и той же точки). Будем считать, что вектор $\vec{l}$, задающий направление, имеет длину единица. Тогда

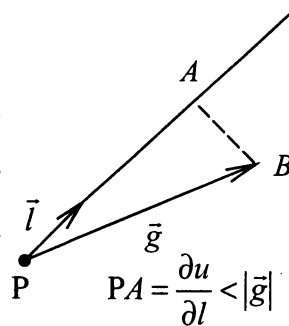
$\vec{l}(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Проекция $\vec{g}$ на направление $\vec{l}$ равна скалярному произведению этих векторов; $(\vec{g}, \vec{l})$ – скалярное произведение.

$$\text{Пр}_{\vec{l}} \vec{g} = (\vec{g}, \vec{l}) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

(Скалярное произведение векторов есть сумма произведений их одноименных координат);

2) в данной точке наибольшая скорость изменения функции u происходит в направлении ее градиента (рис.98). Эта наибольшая скорость

равна модулю градиента: $|\vec{g}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$



$$PA = \frac{\partial u}{\partial l} < |\vec{g}|$$

Рис. 98

Свойство следует из того, что самая большая проекция вектора $\vec{g}$ получится, когда проектирование осуществляется на направление самого $\vec{g}$ (катет всегда меньше гипотенузы);

3) градиент, построенный в точке P , перпендикулярен касательной к линии уровня функции u , проходящей через эту точку.

Уравнение линии уровня функции $u = f(x, y)$ будет $f(x, y) = C$ [если у точки P координаты (x_0, y_0) , то ее принадлежность линии уровня означает, что $f(x_0, y_0) = C$]. Найдем угловой коэффициент касательной к линии. Дифференцируем по x неявно заданную уравнением $u = f(x, y) = C$ функцию $y = y(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = 0, y' = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \text{ – это угловой коэффициент к касательной.}$$

Угловой коэффициент прямой, идущей по градиенту $\vec{g}$, будет

$$k_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \text{ и } k \cdot k_1 = -1, \text{ а это - условие перпендикулярности прямых.}$$

Таким образом, градиент направлен по нормали к линии уровня (рис. 99).

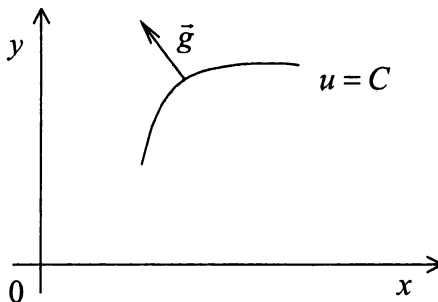


Рис. 99

В случае пространственного поля $u = f(x, y, z)$ градиент – это вектор:

$$\bar{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \quad \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} - \text{орты осей.} \quad (38)$$

Свойства 1) и 2) сохраняются, а свойство 3) формулируется так: градиент направлен по нормали к поверхности уровня.

ГЛАВА V. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ

§1. Плоские кривые. Кривизна

1.1. Дифференциал длины дуги

Рассмотрим график L дифференцируемой функции $y = f(x)$. Положение точки на кривой L будем задавать, указывая длину S дуги кривой от некоторой начальной точки A до взятой точки.

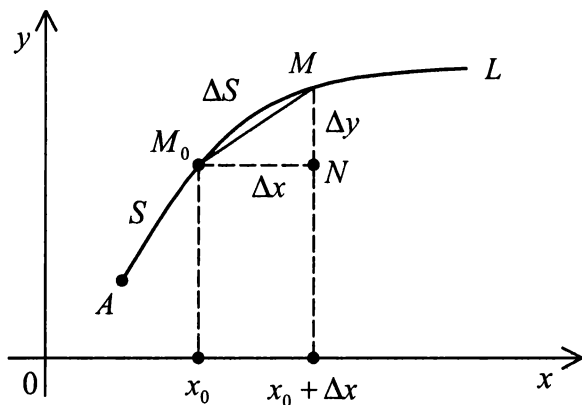


Рис. 100

На рис.100 взята точка M_0 , S – длина дуги от A до M_0 (S называют дуговой координатой точки M_0). Дадим независимой переменной приращение Δx . На графике возникнет новая точка M , а дуга S изменится на ΔS – приращение длины дуги. Поскольку функция у нас дифференцируемая, то можно доказать, что

$$\Delta S \sim M_0M \text{ при } \Delta x \rightarrow 0 (M_0M - \text{хорда}). \quad (1)$$

Из рис.100 видно, что $M_0M = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Мы можем теперь вычислить производную от дуги S по независимой переменной x (в точке x_0):

$$S'_x = \frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M_0M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y' \text{ при } \Delta x \rightarrow 0\right). \quad (2)$$

Отсюда

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \text{ т.к. } y' dx = dy. \quad (3)$$

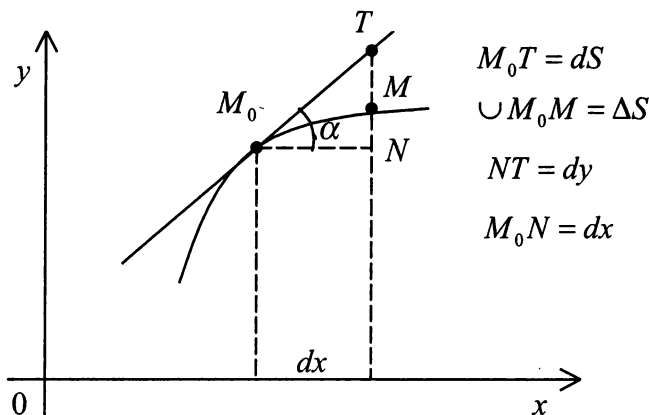


Рис. 101

Из ΔM_0NT (рис.101) видим:

$$M_0T = \sqrt{M_0N^2 + NT^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dS.$$

Таким образом, dS – отрезок касательной прямой. Поскольку дифференциал эквивалентен приращению при $\Delta x \rightarrow 0$, то из рис.101 следует

$$dS \sim \Delta S = \tilde{M}_0M \sim \text{хорде } M_0M.$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (4)$$

то из (3) получим такую формулу для dS :

$$dS = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt. \quad (5)$$

1.2. Кривизна плоской линии

Спросим себя: какая линия “кривее” другой? Поскольку в бесконечно малых участках кривая очень хорошо заменяется отрезками своих касательных прямых,

за меру искривленности того или иного участка кривой можно было бы принять угол, на который повернулась касательная прямая на этом участке. Однако рассмотрим рис. 102.

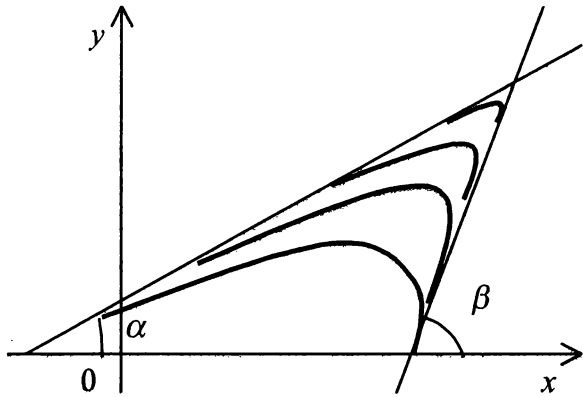


Рис. 102

Каждая из изображенных там дуг в начальной своей точке касается прямой, наклоненной под углом α , а в конечной – прямой с углом наклона β . Таким образом, касательная для каждой из этих дуг поворачивается на угол $\beta - \alpha$. И все-таки ощущается, что большие дуги на этом рисунке более пологие, а малые поворачиваются быстрее, более изогнуты. В чем дело? Для больших дуг этот поворот происходит на участке, имеющем бóльшую длину, чем для малых. Один и тот же поворот вызван перемещением на разную длину для разных кривых. Поэтому, чтобы получить более правильное представление об изогнутости кривой, угол поворота касательной соотносят с длиной соответствующего участка кривой.

На рис. 103 касательная на участке M_0M длины ΔS повернулась на угол

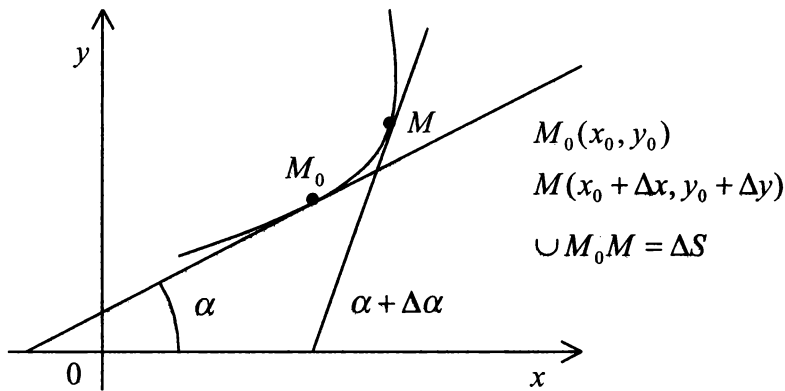


Рис. 103

$\Delta\alpha$. Число

$$K_{cp} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} \right| \quad (6)$$

принимается за среднюю кривизну этого участка, а кривизна в какой-то точке M_0 это:

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} K_{cp} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dS} \right|. \quad (7)$$

Обозначение модуля $\left| \right|$ стоит потому, что в этом вопросе важна именно абсолютная величина $\frac{d\alpha}{dS}$, а не знак. Вычислим кривизну. Мы помним, что $tg\alpha = y'$. Поэтому $\alpha = arctgy'$,

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{dS} = \frac{\frac{d(arctgy')}{dx}}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1 \cdot \frac{d}{dx}(y')}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Мы воспользовались (2) и формулой производной для арктангенса. Итак,

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Для параметрически заданной кривой формула (8) пересчитывается следующим образом:

$$K = \frac{|\phi'\psi'' - \psi'\phi''|}{(\phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}. \quad (9)$$

Из (7) следует, что K есть скорость изменения угла наклона касательной относительно изменения длины кривой.

Для окружности радиуса R средняя кривизна любой дуги (независимо от ее длины) $K_{cp} = \frac{1}{R}$; но тогда и кривизна K в любой точке, поскольку

$$K = \lim K_{cp}, \text{ будет такая же: } K = \frac{1}{R}.$$

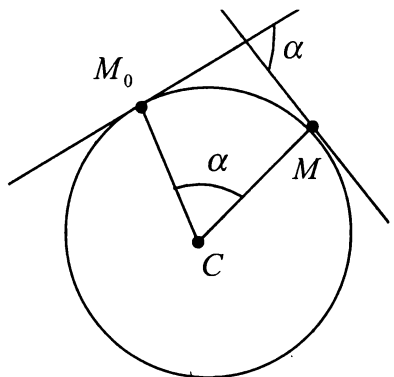


Рис. 104

Действительно (рис.104), возьмем дугу $\overset{\smile}{M_0M}$. При ее обходе радиус повернется на угол α , а длина ее будет $R\alpha$. Касательная при обходе дуги $\overset{\smile}{M_0M}$ также повернется на угол α (в силу перпендикулярности касательной к радиусу получаются углы с попарно перпендикулярными сторонами).

$$\text{Значит, } K_{cp} = \frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R} \text{ и } K = \frac{1}{R}.$$

Прямая линия представляется уравнением $y = ax + b$. Поэтому $y'' = 0$ и согласно (8) в любой точке $K = 0$ – на то линия и прямая. Для любой кривой в точках, где $y'' = 0$, будет $K = 0$. В частности, так будет в точках перегиба кривой. В этих точках кривая является “более прямой”, чем в остальных.

1.3. Радиус кривизны. Круг и центр кривизны

Величина

$$R = \frac{1}{K} \quad (10)$$

называется радиусом кривизны в соответствующей точке. Это естественно, поскольку именно так обстоит дело с окружностью

Если по нормали к кривой L отложить R в сторону вогнутости кривой, то получится центр кривизны C (рис.105).

Окружность, очерченная из C радиусом R , называется кругом (окружностью) кривизны (рис.105). Можно доказать, что окружность кривизны есть предельное положение окружности, проведенной через 3 точки

M_1, M_0, M_2 на кривой, когда эти точки

сливаются в одну M_0 , т.е. когда

$M_1 \rightarrow M_0, M_2 \rightarrow M_0$. Поэтому в некотором смысле бесконечно малая

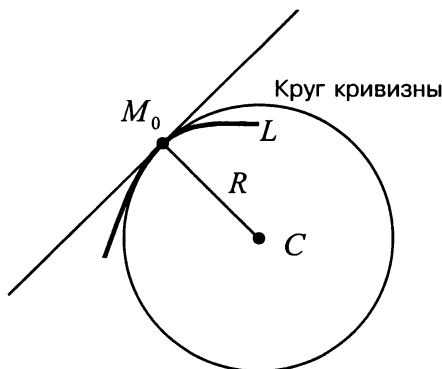


Рис. 105

дуга окружности кривизны еще теснее заменяет б.м. дугу кривой, чем б.м. отрезок касательной прямой: ведь касательная – это предельное положение секущей, а у секущей лишь две общие с кривой точки.

Мы не будем приводить формул для координат центра кривизны. Если построение центров кривизны провести для всех точек данной линии, то совокупность этих центров составит новую кривую, которая для первоначальной называется ее эволютой, а заданная первоначальная кривая по отношению к своей эволюте называется ее эвольвентой (по всем вопросам этого подраздела см. [2] гл.VI §§6–7).

§2. Пространственные кривые

2.1. Векторное уравнение пространственной кривой

Кривая линия в пространстве может быть задана как пересечение двух поверхностей:

$$F(x, y, z) = 0 ;$$

$$\Phi(x, y, z) = 0 .$$

Например, линия

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

есть эллипс, получающийся от среза прямого кругового цилиндра (второе уравнение) плоскостью (первое уравнение).

Более удобным во многих вопросах является задание линии параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (11)$$

Координаты x, y, z текущей по кривой точки задаются как функции от параметра t , меняющегося на каком-то интервале. Например, линию из предыдущего примера можно задать такими уравнениями:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{2} \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Первые два из этих уравнений на плоскости xOy изображают окружность, а в пространстве дают координаты x и y любой точки на цилиндрической поверхности, основанием которой служит эта окружность, координата z найдена из уравнения плоскости.

Рассмотрим в пространстве вектор

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k} \quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{орты}) \quad (12)$$

с переменными координатами x, y и z . Мы сталкиваемся здесь с новым видом функциональной зависимости: аргументом этой функции является обычная переменная величина t , а значением функции – переменная *векторная* величина. Обычная величина t характеризуется только своими численными значениями, но значения переменной векторной величины – это векторы, а векторы характеризуются не только своими размерами, но и направлением. Когда в одном описании одновременно встречаются и обычные и векторные величины, то обычные величины именуют скалярными и тем отличают от векторных. Встречались ли мы уже с переменными векторными величинами? Да, когда в §3 гл.IV рассматривали поле градиента скалярной функции.

Векторная функция (12) задает нашу пространственную линию и служит заменой параметрических уравнений (11) этой линии (рис. 106).

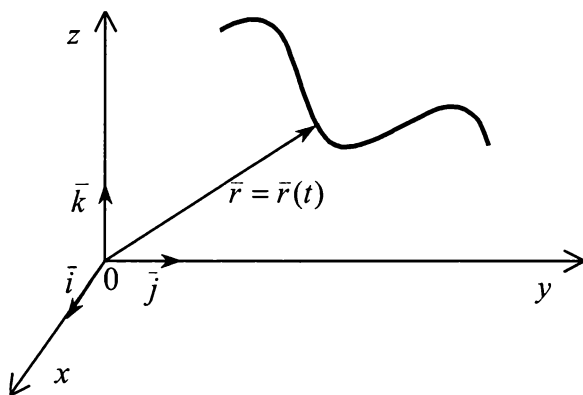


Рис. 106

При изменении t конец вектора $\vec{r}(t)$ (этот вектор называют радиус-вектором) описывают кривую. И эта кривая служит изображением функции $\vec{r}(t)$. Ее называют *годографом* этой функции.

2.2. Касательная к пространственной кривой

Рассмотрим линию L , задаваемую векторной функцией (12). Как обычно, касательная прямая определяется как предельное положение секущей. Возьмем точку $M_0 \in L$, которая соответствует начальному значению t_0 параметра. Дадим t приращение Δt . Значению $t_0 + \Delta t$ отвечает значение радиуса-вектора, определяющее точку M на линии L .

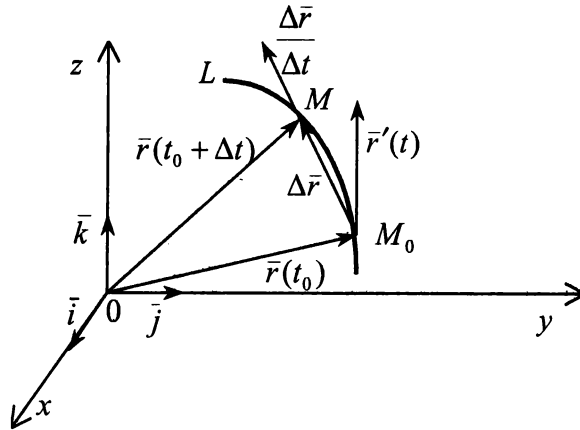


Рис. 107

Тогда (рис.107):

$$\vec{r}(t_0) = \varphi(t_0)\vec{i} + \psi(t_0)\vec{j} + \chi(t_0)\vec{k};$$

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \varphi(t_0 + \Delta t)\vec{i} + \psi(t_0 + \Delta t)\vec{j} + \chi(t_0 + \Delta t)\vec{k};$$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) &= [\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)]\vec{i} + [\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)]\vec{j} + \\ &+ [\chi(t_0 + \Delta t) - \chi(t_0)]\vec{k} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}. \end{aligned}$$

Функции $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ здесь и далее считаем дифференцируемыми и поэтому все дальнейшие выкладки законны:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} = \varphi'(t_0)\vec{i} + \psi'(t_0)\vec{j} + \chi'(t_0)\vec{k}.$$

Получившееся выражение и следует понимать как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ и считать

производной $\vec{r}'(t)$ от векторной функции $\vec{r}(t)$, вычисленной при $t = t_0$:

$$\vec{r}'(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'(t_0)\vec{i} + \psi'(t_0)\vec{j} + \chi'(t_0)\vec{k}. \quad (13)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ точка $M \rightarrow M_0$ и вектор $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, идущий по секущей M_0M ,

стремится к предельному положению $\vec{r}'(t_0)$, которое тем самым идет по касательной к линии. Итак, производная $\vec{r}'(t)$ служит направляющим вектором касательной прямой. Поэтому уравнения касательной можно записать в виде:

$$\frac{X - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{\chi'(t_0)}, \quad x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), z_0 = \chi(t_0). \quad (14)$$

Здесь (X, Y, Z) – координаты текущей точки касательной, а x_0, y_0, z_0 – координаты точки касания.

Более внимательное рассмотрение вектора $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ показывает, что он направлен в сторону движения по кривой, соответствующего возрастанию параметра t ($\Delta t > 0$). Поэтому и предельное положение $\vec{r}'(t)$ этого вектора направлено в сторону, соответствующую движению по L , отвечающему возрастанию t .

2.3. Нормальная плоскость

Плоскость, проведенная через точку касания M_0 перпендикулярно касательной прямой называется **нормальной плоскостью** к кривой в этой точке. Ее уравнение имеет вид:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0) = 0, \quad (15)$$

где t_0 – значение параметра, отвечающее точке $M_0 \in L$; x_0, y_0, z_0 – координаты M_0 ; x, y, z – координаты текущей точки плоскости.

2.4. Дифференциал длины дуги

Из формулы (13) получаем, что (t – произвольное значение параметра):

$$\begin{aligned} |\vec{r}'(t)| &= \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}; \\ |d\vec{r}| &= |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} |dt|. \end{aligned} \quad (16)$$

Будем от некоторой начальной точки A на кривой L отсчитывать длину

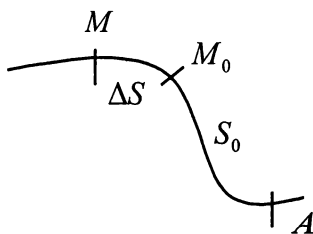


Рис. 108

дуги $\overset{\smile}{AM_0}$ до произвольной точки $M_0 \in L$ (рис.108).

Вернувшись к рис.107, видим, что

$\overset{\smile}{M_0M} = \Delta S$ стягивается вектором $\Delta \vec{r}$. При

$\Delta t \rightarrow 0$ считаем, как обычно, что две б.м. ΔS и

$|\Delta \vec{r}|$ эквивалентны. Тогда:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = |\vec{r}'(t)| = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2},$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (17)$$

($dx = \varphi'(t)dt$ и т.д.).

Формула (17) – обобщение формулы (3) для плоских кривых из §1.

2.5. Натуральные уравнения кривой. Главная нормаль

Наиболее удобным по ряду причин является случай, когда в параметрических уравнениях (11) в качестве параметра взята длина дуги S на этой кривой:

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s). \quad (18)$$

Такие уравнения называют **натуральными уравнениями кривой**. В этом случае, как следует из сравнения (17) и (16)

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1, \quad (19)$$

т.е. производная $\vec{r}'(s)$ является вектором единичной длины, направленным по касательной (ортом касательной) в сторону движения, отвечающего возрастанию s .

Обозначим этот вектор $\vec{r}'(s)$ через $\vec{\tau}$ и найдем $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, т.е. $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Исходим

из того, что скалярное произведение $(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = |\vec{\tau}|^2 = 1$. Дифференцируется скалярное произведение двух векторных функций по тем же правилам, что и произведение обычных функций:

$$\frac{d}{ds}(\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}) = \left(\frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \bar{\tau} \right) + \left(\bar{\tau} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right) = 2 \left(\bar{\tau} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right) = \frac{d(1)}{ds} = 0.$$

Скалярное произведение двух векторов равно нулю, если эти векторы перпендикулярны. Таким образом:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} \perp \bar{\tau} \quad \text{или} \quad \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \perp \bar{\tau} \quad (20)$$

Прямая, по которой направлен вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, называется **главной нормалью** линии. Естественно, она расположена в нормальной плоскости (15) к линии.

2.6. Кривизна пространственной кривой

Найдем $\left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right|$. Перейдем из начального положения M (дуговая координата

s) в положение M_1 (дуговая координата $s + \Delta s$). Касательный вектор $\bar{\tau} = \bar{\tau}(s)$ в M перейдет в касательный вектор $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}(s + \Delta s)$ точки M_1 . Таким образом, произошел поворот касательного вектора (рис.109) на угол $\Delta\alpha$; этот угол называют **углом смежности** (чтобы обозначить этот угол, вектор $\bar{\tau}$ переносится в точку M_1).

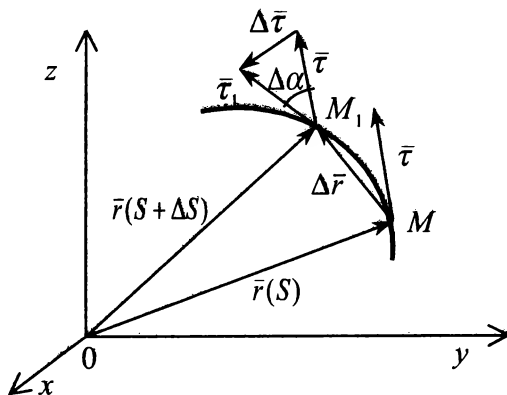


Рис. 109

Происшедший поворот касательного вектора $\bar{\tau}$ характеризует изогнутость кривой (будь она прямой линией, было бы $\Delta\alpha = 0$). Отношение $\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$ называется (как и в случае плоской кривой) средней кривизной на участке Δs :

$$K_{cp.} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

Предел $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} K_{cp.}$ называется кривизной линии в точке M :

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|. \quad (21)$$

Следовательно, кривизна – это скорость изменения угла смежности касательных относительно длины дуги.

Треугольник со сторонами $\bar{\tau}, \bar{\tau}_1, \Delta\bar{\tau}$ – равнобедренный, так как $|\bar{\tau}| = |\bar{\tau}_1| = 1$ и имеет угол при вершине $\Delta\alpha$. Из этого треугольника находим:

$$|\Delta\bar{\tau}| = 2 \left| \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \right|. \text{ Вычисляем предел:}$$

$$\left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \left| \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \left| \frac{\Delta\alpha}{2} \right|}{\Delta s} = K. \quad (22)$$

Таким образом, вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ направлен по главной нормали и имеет модуль, равный кривизне. Величину, обратную K , называют, как и в плоском случае, радиусом кривизны R :

$$R = \frac{1}{K}. \quad (23)$$

Если обозначить орт (единичный вектор) главной нормали через $\bar{n}$, то

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = K\bar{n} = \frac{1}{R} \bar{n}. \quad (24)$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями (11), формула для кривизны K имеет более сложный вид, чем (22), и мы ее приводить не будем – см. [2] гл.IX §4.

2.7. Соприкасающаяся плоскость. Бинормаль. Кручение

Плоскость, содержащая касательную прямую и главную нормаль, называется **соприкасающейся плоскостью** кривой L (в данной точке). Можно показать, что соприкасающаяся плоскость кривой L в точке $M \in L$ получается следующим образом. Возьмем три точки M_1, M, M_2 на L и проведем через них плоскость Q . При $M_1 \rightarrow M$ и $M_2 \rightarrow M$, т.е. когда эти три точки стремятся слиться в точке M , плоскость Q стремится занять некоторое предельное положение.

Это предельное положение и есть соприкасающаяся плоскость к L в точке M . Если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость в любой ее точке та, в которой лежит кривая. Если при переходе от точки M к точке M_1 на кривой двугранный угол между соприкасающимися плоскостями в M и M_1 есть $\Delta\beta$, то дробь

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta s} \quad (\Delta s = \overset{\circ}{MM}_1)$$

показывает меру отличия изучаемой пространственной кривой от плоской на участке Δs .

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\beta}{\Delta s} \right| \quad (25)$$

называется **кручением кривой** в точке M . Кручение характеризует отличие пространственной линии от плоской, в то время как кривизна – отличие линии от прямой (все в данной точке M). Если возьмем векторное произведение

$$\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n} \quad (26)$$

ортов касательной $\bar{\tau}$ и главной нормали $\bar{n}$, то получим орт **бинормали**. Бинормаль перпендикулярна и касательной и главной нормали и, значит, перпендикулярна соприкасающейся плоскости. Лежит бинормаль в нормальной плоскости.

Угол $\Delta\beta$ из (25) может быть измерен как угол между двумя положениями бинормали: в M и M_1 . Подробности см. [2] гл.IX §5.

2.8. Скорость и ускорение точки, движущейся по кривой

Пусть точка M движется по кривой L . Положение точки в момент t описывается координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ или радиусом-вектором $\vec{r}(t)$. Таким образом, в уравнениях (11) или (12) кривой L параметр t теперь время. Пусть в момент t_0 положение точки M_0 характеризуется радиусом-вектором $\vec{r}(t_0)$. За время Δt от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка переместится в позицию M , $\overline{M_0M} = \Delta \vec{r}$ (рис.107) – вектор перемещения. Вектор $\vec{V}_{cp.} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ – средняя скорость за время от t_0 до $t_0 + \Delta t$.

Мгновенная скорость в момент t_0 будет

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_{cp.} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{при } t = t_0). \quad (27)$$

Таким образом, скорость есть вектор, идущий по касательной прямой и направленный в сторону движения.

Модуль $\vec{V}$, который мы обозначим V , есть согласно (16) и (17)

$$V = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2}. \quad (28)$$

Из (27) следует

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot V, \quad (29)$$

где $\vec{\tau}$ – орт касательной. Для ускорения $\vec{a}$ в момент $t = t_0$ получаем:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}) = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + V^2 K \vec{n} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{V^2}{R} \vec{n} \quad (\text{при } t = t_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Мы воспользовались формулами (23), (24), (28), (29). Таким образом, ускорение $\vec{a}$ разложено на две компоненты: одна идет по касательной прямой и

ее величина есть вторая производная от пути по времени, а другая – по главной нормали и ее величина есть квадрат модуля скорости, деленный на радиус кривизны.

2.9. О касательной плоскости к поверхности

Мы определили в п.3 §2 гл.IV касательную плоскость к поверхности как плоскость, натянутую на две прямые: одна из этих прямых была касательной к линии, получающейся на поверхности путем сечения плоскостью $x = x_0$, а другая – касательной к линии сечения плоскостью $y = y_0$. Однако, оказывается, справедлив гораздо более общий факт.

Теорема. Пусть π – касательная плоскость к поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \quad (31)$$

в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Касательная прямая в точке M_0 к любой линии на поверхности, проходящей через точку M_0 , лежит в π .

Доказательство. Пусть линия L задана уравнениями (11). То, что линия L лежит на поверхности, означает, что все ее точки удовлетворяют уравнению (31):

$$F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \equiv 0. \quad (32)$$

Равенство (32) является тождеством, оно справедливо при всех t .

Дифференцируя сложную функцию от t , получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} \chi'(t) \equiv 0. \quad (33)$$

Пусть точке M_0 на поверхности отвечает значение параметра $t = t_0$ в уравнениях линии L , которая по условию проходит через эту точку:

$$M_0(x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), z = \chi(t_0)).$$

Вектор $\vec{r}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \chi'(t_0))$ идет по касательной прямой к линии

L (см. п.2.2 этого параграфа), а вектор $\vec{N} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 \right)$ (п. 3.7 §3

гл.IV) направлен по нормали к поверхности. Условие (33) означает, что скалярное произведение $(\vec{N} \cdot \vec{r}'(t_0)) = 0$. Значит, касательная прямая к L перпендикулярна

к нормали $\vec{N}$ и лежит в касательной плоскости. #

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.**

2. Решите самостоятельно следующие задачи:

Вариант 1

1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

2. Найти производную функции $y = \sqrt{1-x^3}$.

3. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \frac{x}{1+x^2}$.

4. Найти область определения и изобразить графически линии уровня

функции $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

5. Вычислить частные производные до второго порядка включительно функции $z = e^{x-y}$.

6. Провести касательную плоскость к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $(1, 1, ?)$.

7. Провести касательную прямую к кривой $x = t^2, y = t, z = t^3$ при $t = 2$.

Вариант 2

1. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 5}$.

2. Продифференцировать функцию $y = e^{-x^2} \cdot x^3$.

3. Найти участки выпуклости и вогнутости для линии $y = x^3$.

4. Найти и изобразить графически область определения функции

$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

5. Вычислить частные производные первого и второго порядка для функции

$z = \frac{e^{-xy}}{x}$.

6. Провести касательную плоскость к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ в точке $(-1, -1, -1)$.

7. Провести нормальную плоскость к кривой $x = t, y = t^2, z = -t^3$ в точке $(1, 1, -1)$.

Вариант 3

1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

2. Найти производную функции $y = \ln(x^3 + \sin x)$.

3. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = e^{-x^2}$.

4. Изобразить графически линии уровня функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x - 4y - x^2 - y^2$.

6. Найти градиент функции $u = xyz^2$ в точке $(-1, 1, 2)$.

7. Провести касательную прямую к винтовой линии $x = \cos t, y = \sin t, z = t$

в точке, отвечающей значению $t = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 4

1. Раскрыть неопределенность $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}}$.

2. Продифференцировать функцию $y = e^{\frac{x}{x+1}}$.

3. Найти асимптоты графика функции $y = x - \frac{1}{x}$.

4. Найти и изобразить графически область определения функции $z = \ln(x^2 - y)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 - 5x + 6$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 1, x = -1, y = 0, y = 5$.

6. Вычислить производную по направлению вектора $\vec{l}(-1, 0)$ функции $z = \ln(x + y)$ в произвольной точке (x, y) из области определения.

7. Провести нормальную плоскость к винтовой линии $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 3t$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 5

1. Раскрыть неопределенность $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$.
2. Продифференцировать функцию $y = \sin^3 \left(\frac{x}{1-x^2} \right)$.
3. Найти интервалы монотонности, экстремумы и интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^4$.
4. Изобразить графически линии уровня функции $z = 2x^2 - y$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$.
6. Вычислить производную по направлению ее градиента функции $z = \sqrt{x+y}$ в точке (1, 2).
7. Провести касательную прямую к плоской линии, заданной уравнением $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ в точках (4, ?).

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Примеры выполнения упражнений тренинга на умение №1.

Задание 1.1

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{2x^3 + 8x}$.

Решение

Действуем согласно п. а) алгоритма.

Делим числитель и знаменатель на старшую степень x и применяем свойства пределов и б.м.; получается:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \text{б.м.}}{2 + \text{б.м.}} = \frac{1}{2}.$$

Применены: очевидное соображение, что $\frac{3}{x}, \frac{4}{x^2}$ и т.п. – б.м. при $x \rightarrow \infty$ (как величины обратные к б.б.); сумма б.м. – б.м.; переменная, представленная как $a + \text{б.м.}$ стремится к пределу a (следовательно, числитель $\rightarrow 1$, а знаменатель $\rightarrow 2$); предел частного есть частное от деления пределов (предел знаменателя $\neq 0$).

Задание 1.2

Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2}$.

Решение

Действуем согласно п. а) алгоритма.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{б.м.}}{1 + \text{б.м.}} = 0.$$

Задание 1.3

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\arctg 5x}$.

Решение

Действуем согласно п. в) алгоритма.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\arctg 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

Воспользовались таблицей эквивалентных б.м.: $\ln(1+x) \sim x$, следовательно, $\ln(1+3x) \sim 3x$ и $\arctg x \sim x$, стало быть $\arctg 5x \sim 5x$ и свойством эквивалентных б.м.: при отыскании пределов отношений б.м. можно числитель и знаменатель заменять на эквивалентные.

Задание 1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1-5x)}.$$

Решение

Действуем согласно п. г) алгоритма.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1-5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2}{\frac{1 \cdot (-5)}{1-5x}} = \frac{\ln 2}{-5} = -\frac{1}{5} \ln 2$$

Воспользовались правилом Лопиталья и тем, что $2^x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ (т.к. 2^x – непрерывная функция, то $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 2^0 = 1$). Тот же пример можно было решить, пользуясь таблицей эквивалентных б.м.

Решите самостоятельно:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 8x}{-2x^4 + x^2}.$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\arcsin 4x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\arccos 2x} \quad (\text{Это не отношение б.м. Пользоваться таблицей эквивалентных б.м. и правилом Лопиталя нельзя}).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right).$$

2. Примеры выполнения упражнений тренинга на умение №2.

(Как правило, выполняется только дифференцирование без дальнейших преобразований)

Задание 2.1

Найти производную функции $y = \sin^3(-5x + 1)$.

Решение

Последовательно применим п.п. 1–3 алгоритма.

$$\begin{aligned} y' &= 3 \sin^2(-5x + 1) \cdot [\sin(-5x + 1)]' = 3 \sin^2(-5x + 1) \cdot \cos(-5x + 1) \cdot (-5x + 1)' = \\ &= 3 \sin^2(-5x + 1) \cos(-5x + 1) \cdot (-5) \end{aligned}$$

Задание 2.2

$$y = \sqrt{\frac{2x+1}{x^2+4}} \quad y' = ?$$

Решение

Последовательно применим п.п. 1–3 алгоритма.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+4}}} \cdot \left(\frac{2x+1}{x^2+4} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+4}}} \frac{(2x+1)'(x^2+4) - (x^2+4)(2x+1)'}{(x^2+4)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+4}}} \frac{2(x^2+4) - 2x(x^2+1)}{(x^2+4)^2} =! \end{aligned}$$

Задание 2.3

$$y = x^{\cos x} \quad y' = ?$$

Решение

Поскольку и основание степени и ее показатель – переменные, то нельзя пользоваться ни формулой для производной степенной функции, ни формулой производной показательной функции. Логарифмируем и помним, что y – функция от x ! Далее применяем п.п. 1–3 алгоритма.

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x \cdot \ln x)' = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y \cdot [-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}] = x^{\cos x} [-\sin x \ln x + \frac{1}{x} \cos x]$$

Задание 2.4

$$y = \frac{1-10^x}{1+10^x} \quad y' = ?$$

Решение

Применяем п. 1 алгоритма.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-10^x)'(1+10^x) - (1+10^x)'(1-10^x)}{(1+10^x)^2} = \\ &= \frac{-10^x \ln 10(1+10^x) - 10^x \ln 10(1-10^x)}{(1+10^x)^2} = \frac{-2 \cdot 10^x \cdot \ln 10}{(1+10^x)^2} \end{aligned}$$

Задание 2.5

Функциональная зависимость y от x задана параметрически:

$$x = \cos 2t, y = \sin^2 t. \text{ Найти } y'_x.$$

Решение

Вспоминаем правило дифференцирования параметрически заданной функции, а затем применяем п.п. 1–3 алгоритма.

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}; x'(t) = -\sin 2t \cdot 2; y'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t;$$

$$y'_x = \frac{\sin 2t}{-2 \sin 2t} = -\frac{1}{2}.$$

Решите самостоятельно:

Найти y' для функций:

$$1. y = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$2. y = \sqrt{1-x^2}.$$

$$3. y = e^{-x^2}.$$

4. Путь S зависит от времени t по формуле $S = (1 + \sin^2 t)^4$. Найти скорость в момент $t = \frac{\pi}{2}$.

5. Путь S зависит от времени t по формуле $S = \ln^2 t$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 1$.

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3.

Задание

Написать уравнения касательной и нормали к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точке ее пересечения с осью Ox .

Решение

Найдем точку пересечения с Ox . В ней $y = 0, x - \frac{1}{x} = 0, x = \pm 1$.

Получились две точки $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Находим производную: $y' = 1 + \frac{1}{x^2}$. При

$x = 1$ $y'(1) = 2$, при $x = -1$ $y'(-1) = 2$. Касательные прямые: в точке $(1, 0)$ $y = 2(x - 1)$, в точке $(-1, 0)$ $y = 2(x + 1)$. Нормали: в точке $(1, 0)$

$y = -\frac{1}{2}(x - 1)$, в точке $(-1, 0)$ $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$.

Решите самостоятельно:

1. Найти уравнение касательной к линии $y = \ln x$ в точке (x_0, y_0) .

2. Найти уравнение касательной к линии $y = \frac{8}{4 + x^2}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

3. Найти уравнение нормали к линии $y = x^2(x - 2)^2$ в точках пересечения с осью абсцисс.

4. Найти уравнение нормали к линии $y = -\sqrt{x} + 2$ в точке с абсциссой $x = 1$.

5. На линии $y = \frac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умения №4 и 5.

Задание

Найти интервалы монотонности для функции $y = x^3 - 3x + 2$.

Решение

1. Находим $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

2-3. Стационарные точки: $y' = 0; 3(x^2 - 1) = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$.

4. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Стационарные точки разбивают область определения на интервалы $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.

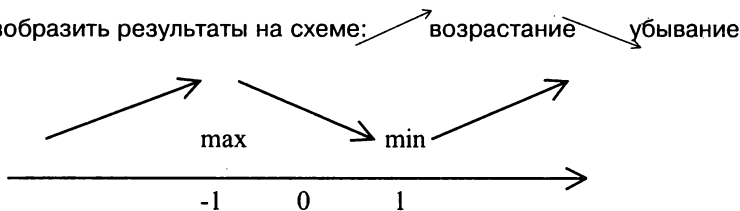
5. Знаки y' узнаются испытанием какой-то из точек на каждом из получившихся интервалов:

$(-\infty, -1), x = -2, y'(-2) = 3 \cdot ((-2)^2 - 1) = 9 > 0$, тогда $y' > 0$ на всем интервале $(-\infty, -1)$ и функция возрастает;

$(-1, 1), x = 0, y'(0) = -3 < 0, y' < 0$ на всем интервале, функция убывает;

$(1, +\infty), x = 2, y'(2) = 3 > 0, y' > 0$ на всем интервале, функция возрастает.

Полезно изобразить результаты на схеме:



В точке $x = -1$ y' меняет знак с + на -, функция y - возрастание на убывание; в этой точке максимум. В точке $x = 1$ y' меняет знак с - на +, функция y - убывание на возрастание. В точке $x = 1$ - минимум.

Решите самостоятельно:

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

2. $y = x - \ln x$.

3. $y = x^2 - 5x + 1$.

4. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

5. $y = e^{-x^2}$.

5. Примеры выполнения упражнений тренинга на умение №6.

Задание 6.1

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на $[-2, 2]$.

Решение

1. $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \quad y' = 0; x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$, других критических точек нет.

2. Вычисляем значения y в стационарных точках и в концах интервала:

$$x = -2, y = 13; x = -1, y = 4; x = 0, y = 5; x = 1, y = 4; x = 2, y = 13.$$

Наибольшее значение 13 достигается в точках $-2, 2$.

Наименьшее значение 4 достигается в точках $-1, 1$.

Задание 6.2

Найти положительное число, которое, будучи сложено с обратной ему величиной, дает наименьшую сумму

Решение

Обозначаем неизвестное число x ; обратная величина $\frac{1}{x}$, сумма

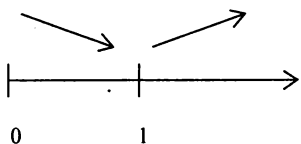
$y = x + \frac{1}{x}$. Область определения (в связи с условием $x > 0$) $(0, +\infty)$. Ситуация

нестандартная: интервал открытый и бесконечный.

1. Вычисляем $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$.

2. Стационарная точка $y' = 0: x = 1$ (решение $x = -1$ выпадает из интервала $(0, +\infty)$). Интервалы: $(0, 1), (1, \infty)$. На $(0, 1)$ $y' < 0$, y - убывает. На $(1, +\infty)$ $y' > 0$, y - возрастает.

Схема:



В точке $x = 1$ - минимум и ясно, что здесь наименьшее из всех значений функции (из схемы, например).

Таким образом, $x = 1$ - решение задачи, а

$$y = 1 + \frac{1}{1} = 2 \text{ - наименьшая сумма.}$$

Решите самостоятельно:

(на нахождение наибольшего и наименьшего значений функций)

1. $y = \frac{x-1}{x+1}, [0, 4].$

2. $y = \sqrt{100 - x^2}, [-6, 8].$

3. $y = \sin 2x - x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

4. $y = x^3 + x^2 + x + 1, [0, 4]$.

5. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (эта функция называется "гиперболический косинус" и

обозначается $ch\ x$) $[-1, 2]$.

6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №7.

Задание

Провести полное исследование функции $y = \frac{1}{1+x^2}$.

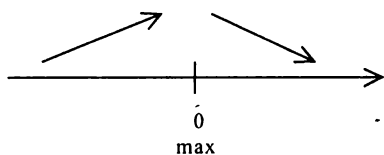
Решение

1. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция четная. Точек разрыва и вертикальных асимптот нет: С осью Ox не пересекается: $y \neq 0$ при $\forall x$. С осью Oy пересечение при $x = 0, y = 1$.

2. $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Стационарная точка $x = 0$. Интервалы $(-\infty, 0), (0, +\infty)$.

Знаки y' : $(-\infty, 0), y' > 0$; y возрастает, $(0, +\infty), y' < 0$; y убывает.

Схема:



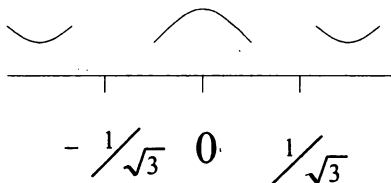
При $x = 0$ – максимум.

3. Находим $y'' = \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3}$. $y'' = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Интервалы:

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}), y'' > 0$ выпуклость

$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), y'' < 0$ вогнутость

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty), y'' > 0$ выпуклость

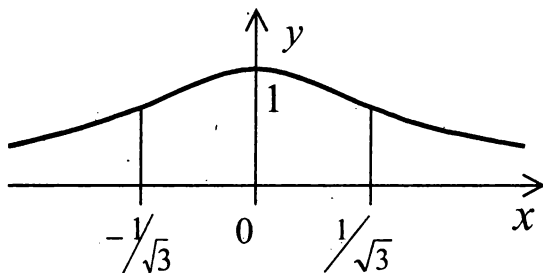


В точках $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y'' меняет знак, там перегиб.

$$4. k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(1+x)^2 x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$

5. График:



$$x = -1, y = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{3}{4}$$

$$x = 0, y = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{3}{4}$$

$$x = 1, y = \frac{1}{2}$$

Решите самостоятельно:

Провести исследование и построить графики функций

$$1. y = \frac{1}{x}.$$

2. $y = x + \frac{1}{x}$.

3. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

4. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус shx).

5. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($= chx$).

7. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №8.

Задание

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функции $z = e^{x^2+y^2}(x-y^3)$.

Решение

Считаем y постоянным и дифференцируем по x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x(x-y^3) + e^{x^2+y^2} \cdot 1 = e^{x^2+y^2} \cdot (2x^2 - 2xy^3 + 1).$$

Считаем x постоянным и дифференцируем по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y(x-y^3) + e^{x^2+y^2} \cdot (-3y^2) = e^{x^2+y^2} \cdot (2xy - 2y^4 - 3y^2).$$

Теперь в $\frac{\partial z}{\partial x}$ фиксируем x и находим, дифференцируя по y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^{x^2+y^2} \cdot 2y(2x^2 - 2xy^3 + 1) + e^{x^2+y^2} \cdot (-6xy^2) = \\ &= e^{x^2+y^2} \cdot (4x^2y - 4xy^4 + 2y - 6xy^2). \end{aligned}$$

Фиксируем в $\frac{\partial z}{\partial y}$ переменную y и дифференцируем по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= e^{x^2+y^2} \cdot 2x(2yx - 2y^4 - 3y^2) + e^{x^2+y^2} \cdot 2y = \\ &= e^{x^2+y^2} \cdot (4x^2y - 4xy^4 - 6xy^2 + 2y). \end{aligned}$$

Как и предсказывает теория, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решите самостоятельно:

Найти частные производные первого и второго порядка для функций:

1. $z = x^2 - 2xy + y^2.$

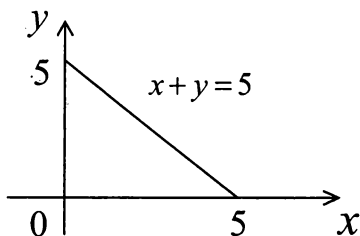
2. $z = \sin(x + y) \cdot y.$

3. $z = \ln(x - y^2)$.

4. $z = \arcsin(xy)$.

5. $z = \sqrt{1 + x - y}$.

8. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №9.



Задание

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 3x^2 - 5y^2 - 6x + 20y + 5$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + y = 5$ (см. рисунок).

Решение

1. Область определения – вся плоскость и значит заданный треугольник лежит в области определения. Линии уровня здесь не требуются.

$$2. \frac{\partial z}{\partial y} = 6x - 6, \frac{\partial z}{\partial x} = -10y + 20.$$

3. Находим стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0, x = 1; -10y = -20, y = 2.$$

Стационарная точка (1, 2).

4 и 5 здесь не нужны.

6. Проводим исследование на границе. На прямой Oy получаем: $x = 0$;

$z = -5y^2 + 20y + 5$; исследуем эту функцию одной переменной на наибольшее

и наименьшее значение на интервале $[0, 5]$; $\frac{dz}{dy} = -10y + 20$; стационарная

точка (для этой функции одного переменного!) $-10y + 20 = 0, y = 2$. Таким образом, “подозрительны” точки: (0, 2) и (0, 0), (0, 5) – концы отрезка. На оси Ox получаем $y = 0, z = 3x^2 - 6x + 5$. Исследуем эту функцию на $[0, 5]$.

$\frac{dz}{dx} = 6x - 6$ Стационарная точка $6x - 6 = 0, x = 1$. Таким образом,

“подозрительны” точки (1, 0) и (5, 0), (0, 0) – концы отрезка. (Но (0, 0) уже встречалась). На прямой $x + y = 5$ получаем:

$$y = 5 - x, z = 3x^2 - 5(5 - x)^2 - 6x + 20(5 - x) + 5 =$$

$= -20x^2 - 16x - 100$, интервал $[0, 5]$. $\frac{dz}{dx} = -4x - 16 < 0$, функция монотонна,

а концы интервала $x = 0$ и $x = 5$ дают уже встретившиеся точки $(0, 5)$ и $(5, 0)$.

Итак, надо провести проверку значений z в точках $(0, 2), (0, 0), (0, 5), (1, 0),$

$(5, 0), (1, 2)$. $(0, 2) z = 25, (0, 0) z = 5, (0, 5) z = -20, (1, 0) z = 2,$

$(5, 0) z = 50, (1, 2) z = 22$. Наименьшее значение $z = -20$ в точке $(0, 5)$.

Наибольшее значение $z = 50$ в точке $(5, 0)$.

Решите самостоятельно:

Исследовать на экстремум функции:

1. $z = 2x - 4y - x^2 - y^2$.

2. $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y}{2} - 4x - 5y.$

3. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функций

4. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

5. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$.

9. Примеры выполнения упражнений тренинга на умение №10.

Задание 10.1

Найти градиент $\bar{g}$ плоского скалярного поля $u = \ln(x^2 - y)$ в точке $P_0(1, -3)$. (Эта точка находится в области определения u).

Решение

Применяем п.1 и 2 алгоритма.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 \cdot 2x}{x^2 - y}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{x^2 - y}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{-1}{1+3} = -\frac{1}{4};$$

$$\bar{g} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \bar{j} = \frac{1}{2} \bar{i} - \frac{1}{4} \bar{j}$$

Задание 10.2

Найти производную в направлении $\bar{l}(-1, 2, 1)$ поля $u = xyz$ в точке $(1, 1, 1)$.

Решение

Применяем п.1 и 2 алгоритма.

Находим направляющие косинусы вектора $\bar{l}$:

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{6}}; \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{6}}; \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = 1; \frac{\partial u}{\partial z} = xy, \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \cos \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \cos \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \cos \gamma = \\ &= \frac{1 \cdot (-1)}{\sqrt{6}} + \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{6}} + \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Решите самостоятельно:

1. Найти градиент скалярного поля $u = xyz$ в точке $(1, 2, -3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2 + y^3$ в точке $(0, 0)$.

3. Найти производную в направлении вектора $\vec{l}(-1,1)$ скалярного поля $u = x^3 y$ в точке $(1,-2)$.

4. Найти производную функции $u = \sqrt{4 - xyz}$ в точке $(-1,1,-1)$ в направлении вектора $\vec{l}(1,1,1)$.

5. Найти производную функции $u = e^{x+y}$ в точке $(2, -2)$ в направлении ее градиента в этой точке.

10. Примеры выполнения упражнений тренинга на умения №11-12.

Задание 11.1

Провести касательную плоскость (написать уравнение !) к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ в точке $P_0(-1, -1, 1)$.

Решение

Применяем п. 1 и 2 алгоритма умения 11.

Подстановкой координат P_0 в уравнение поверхности убеждаемся, что P_0

лежит на сфере. Имеем $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = -2; \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 = -2; \frac{\partial F}{\partial z} = 2z, \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 = 2$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0 (z - z_0) = 0$$

$$(-2)(x + 1) - 2(y + 1) + 2(z - 1) = 0, x - y + z - 6 = 0$$

Задание 11.2

Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($a > 0, b > 0$ – заданные константы) в точке M_0 , отвечающей значению $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение

Применяем п. 1–3 алгоритма умения 12.

$$\text{Имеем: } x_0 = a \cos \frac{\pi}{2} = 0; y_0 = a \sin \frac{\pi}{2} = a; z_0 = b \frac{\pi}{2}. M_0(0, a, b \frac{\pi}{2})$$

$$\varphi'(t) = -a \sin t, \varphi'(t_0) = -a; \psi'(t) = a \cos t, \psi'(t_0) = 0;$$

$$\chi'(t) = b, \chi'(t_0) = b.$$

Уравнения касательной прямой будут: $\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi'(t_0)}$. Поскольку

у нас $\psi'(t_0) = 0$, то эта система уравнений переписывается так:

$$\frac{x}{-a} = \frac{z - b \frac{\pi}{2}}{b}; y - a = 0 \quad (\text{Вспомните аналитическую геометрию!}). \text{ Таким}$$

образом, касательная лежит в плоскости $y = a$, параллельной xOz , и имеет в

этой плоскости уравнение $bx + az - ab \cdot \frac{\pi}{2} = 0$. Уравнение нормальной

плоскости:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0) = 0,$$

$$-ax + b(z - \frac{\pi}{2}) = 0, -ax + bz - \frac{b^2\pi}{2} = 0. \text{ Отсутствие } y \text{ в получившемся}$$

уравнении означает, что плоскость $| Oy$ и стало быть перпендикулярна плоскостям, которые $| xOz$, а значит, и касательной прямой, как и должно было быть.

Решите самостоятельно:

Дано уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$ и точка P_0 на ней. Провести касательную плоскость к поверхности в точке P_0 .

1. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (эллипсоид), $P_0\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2. $z = x^2 + y^2$ (эллиптический параболоид) в точке $(1, 1, ?)$.

3. Написать уравнения нормали к конусу $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке $P_0(3,4,5)$.

4. Написать уравнения касательной прямой к линии:

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \text{ при } t = 1.$$

5. Написать уравнение нормальной плоскости к кривой из п.4. в точке соответствующей $t = -2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЮНИТА 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Редактор Н.М. Пилипенко
Оператор компьютерной верстки И.Ю. Маслова

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"
Тираж 14000.

Сдано в печать 20.11.2001 г.
Заказ 4044.

Современный Гуманитарный Университет

Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2 а.

